Buenos días a todas y a todos. Muchas gracias por su asistencia.
He de agradecer a los miembro de la organización que hayan valorado positivamente que puede ser de interés para todos ustedes el trabajo de todos los colegas y amigos que conformamos la Red Educativa Digital Descartes y que desarrollamos el proyecto Descartes.
Nuestro contacto inicial se realizó a través de la redes sociales. No teníamos ninguna relación previa y nos alegra que este se haya formalizado, pues para nosotros es una muestra fehaciente de que el trabajo que realizamos como asociación y que ponemos a disposición de cualquier navegante de internet, de manera altruista, tiene receptores. Ese es el premio a nuestro altruismo.

Tengo el honor de presidir la organización no gubernamental "Red Educativa Digital Descartes". RED Descartes es una asociación sin ánimo de lucro que tiene como objetivo promover la renovación y cambio metodológico en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, y también en otras áreas de conocimiento, utilizando los recursos digitales interactivos generados con la herramienta de autor que denominamos Descartes. Un proyecto que se inició en el pasado siglo, en junio de 1998, y justo ahora iniciamos nuestro vigésimo segundo año de andadura.

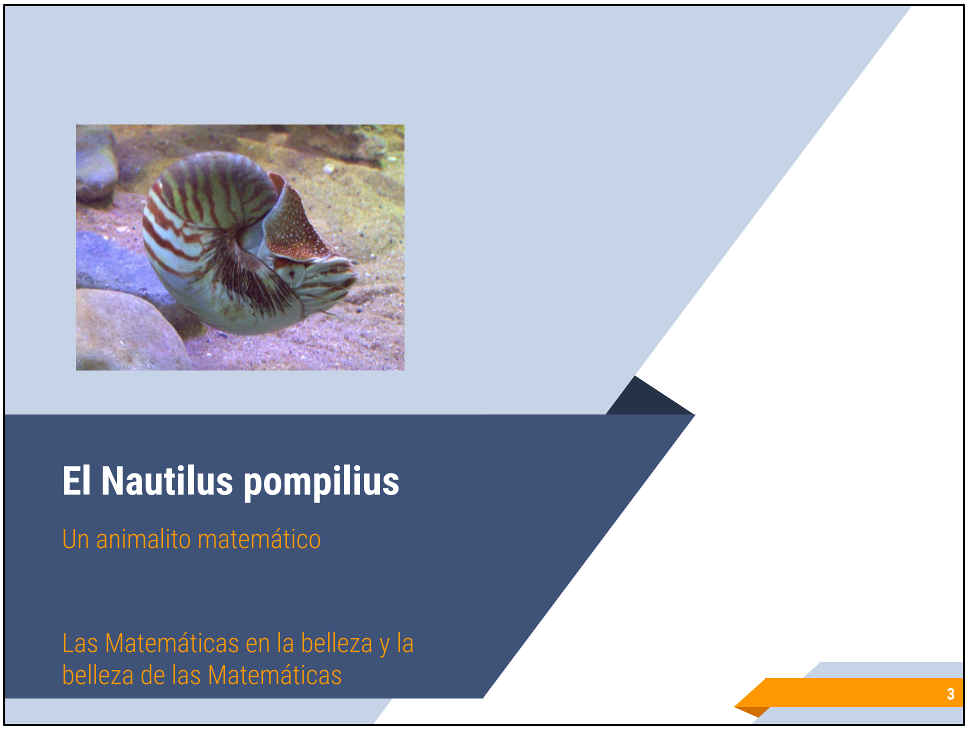
En un contexto tecnológico rápidamente cambiante como es el de la Tecnologías de la información y de la comunicación, permanecer 21 años en el candelero no es sencillo. Ahora no es el momento indicado para profundizar en ello, pero sí puedo simplificar y destacar:

- que es un proyecto diseñado y desarrollado por profesores de todos los niveles educativos,
- que se adentra en ámbitos que se encuadran en la Investigación, en el desarrollo y en la innovación,
- que todo lo que hacemos tiene un objetivo educativo global, sin intereses económicos,

en definitiva, lo que tratamos de englobar en nuestro lema que dice: "RED Descartes trabajando altruistamente por la comunidad educativa de la aldea global".

Y en estos años hemos ido y seguimos acumulando experiencia y estableciendo vínculos de colaboración con colegas de diferentes lugares, creando una nueva academia global gracias a Internet y en particular con la "Red Educativa Digital Descartes de Colombia".

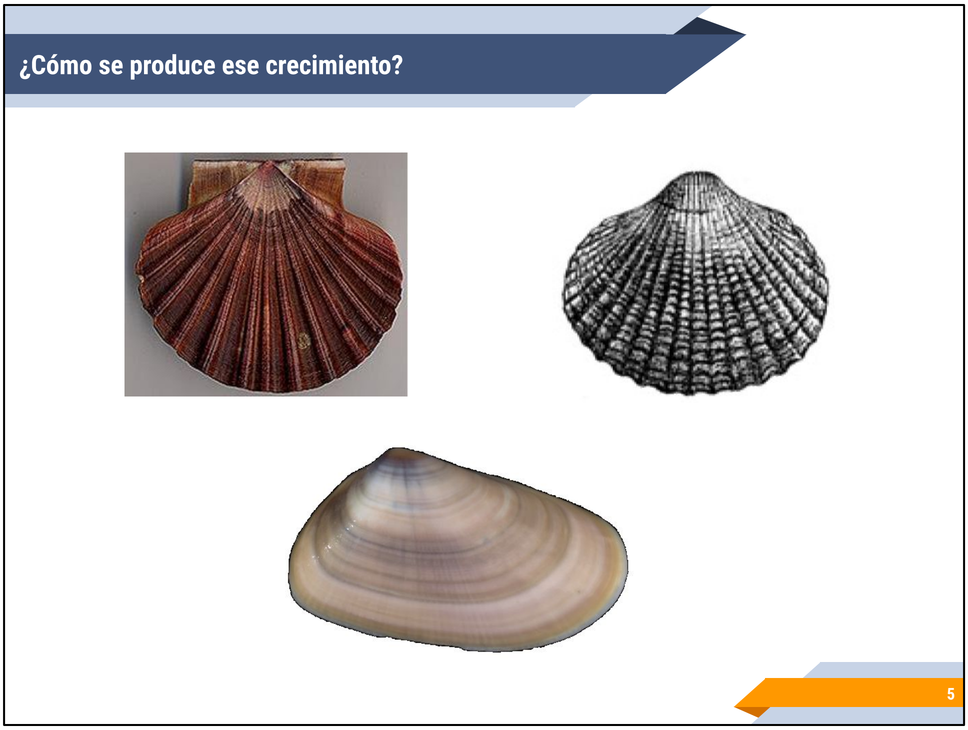
Permítanme un inciso formal para indicarles que aunque en esta presentación he evitado, por precaución, tener que enlazar con páginas web externas he dejado enlaces en las mismas para que quienes a posteriori quieran acceder a la misma puedan profundizar si lo desean. Esos enlaces ha quedado reflejados con el icono ahí insertado.



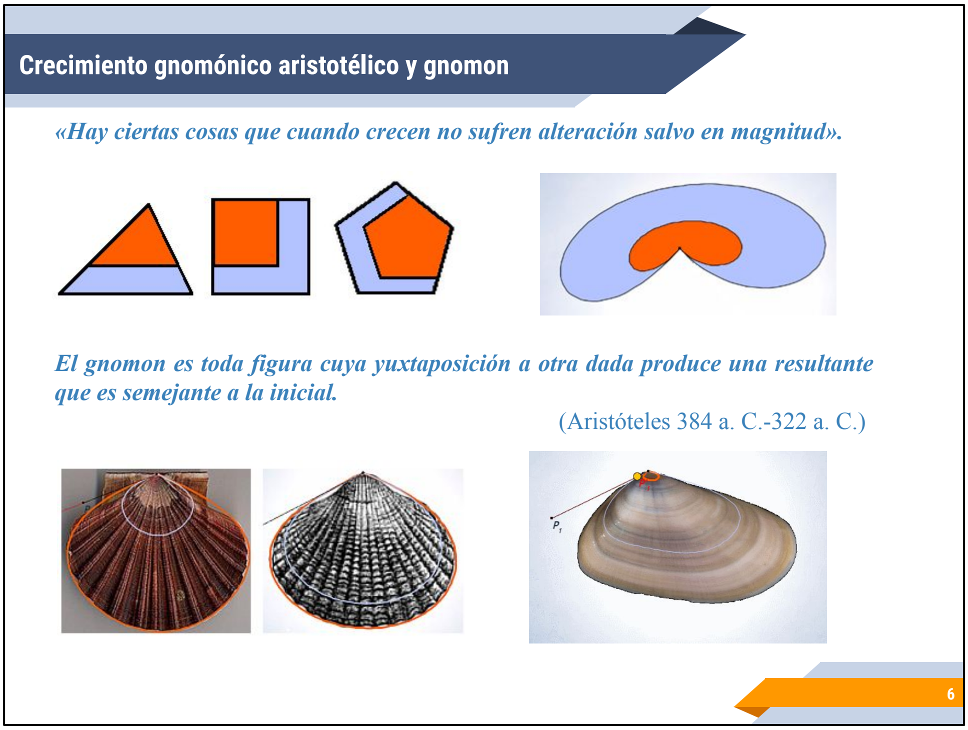
Y tras la ubicación del contexto y grupo donde hemos realizado esta investigación, pasemos ahora a adentrarnos en el objetivo de esta conferencia que es mostrar cómo el Nautilus pompilius es un animalito que lleva haciendo matemáticas desde hace 400 millones de años.

Para ser más precisos conceptualmente deberíamos plantearnos la alternativa entre si la Naturaleza es matemática o si somos nosotros los que realmente matematizamos la Naturaleza. Pero independientemente de cuál fuera la alternativa cierta --si alguna lo es, o si no lo fuera ninguna de ellas, o si lo son ambas-- lo que sí parece obvio es que basta observar nuestro entorno para reconocer atractivas formas naturales y asimilarlas a modelos matemáticos que recíprocamente se mimetizan, estableciendo un hipertunel entre la concreción y la abstracción, entre el mundo real y el virtual. Esta dualidad la he plasmado en otros trabajos con la frase "Las Matemáticas en la belleza y la belleza de las Matemáticas"

El Nautilus como todo ser vivo: nace, crece, se reproduce y muere, pero en su devenir vital va escribiendo un cuaderno de bitácora que refleja y muestra en su concha exterior. Pero mediante una radiografía o mejor aún al realizar una sección de esa concha es cuando nos encontramos con otra bitácora secreta que incrementa aún más su belleza, una gran belleza geométrica al servicio de sus necesidades vitales.



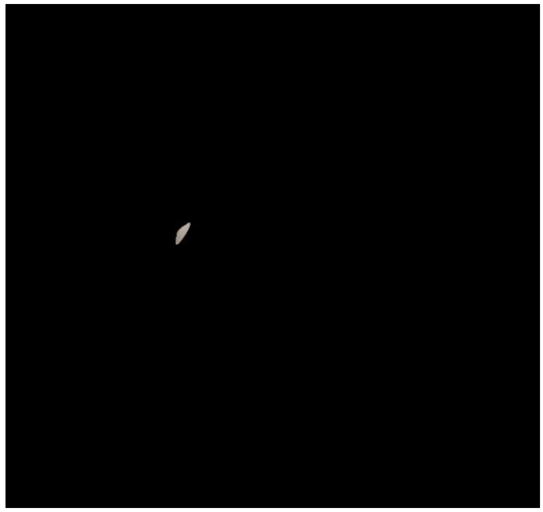
Pero ¿cómo se produce crecimiento?
En la diapositiva hemos reflejado las conchas de una vieira de una almeja y de una coquina y una mirada curiosa a las mismas nos permite observar unas marcas o líneas de crecimiento que nos llevan a extraer una conclusión que no es ni muchos menos moderna sino que se remonta a la grecia clásica que es la base o núcleo de nuestro saber.



Aristóteles observó y afirmó que hay ciertas cosas que cuando crecen no sufren alteración salvo en magnitud y definió el gnomon como toda figura cuya yuxtaposición a otra dada produce una resultante que es semejante a la inicial. Esto es lo que conocemos como crecimiento gnomónico aristotélico.
Desde el punto de vista matemático esta definición puede plantearse para un triángulo, extenderse a cualquier polígono convexo y bajo ciertas restricciones a polígonos cóncavos. A su vez es extensible a recintos planos aun siendo cóncavos siempre que exista un punto, el polo, desde el que todos los segmentos trazados desde él a los puntos de la frontera son interiores.
Indiquemos que Euclides se limita en los Elementos al caso particular de los paralelogramos
El crecimiento gnomónico continuo en la vieira, en la almeja y en la coquina es obvio, nos lo está gritando, basta pararse y escuchar lo que nos dicen las marcas de crecimiento. En la coquina hemos reflejado una simulación de ese crecimiento.

La animación que están observando y las que posteriormente verán están realizadas a partir de escenas de Descartes, aquí las hemos incluido como imágenes con formato gif animado para evitar el abrirlas e interactuar con ellas, pero la esencia de Descartes está precisamente en esa interactividad

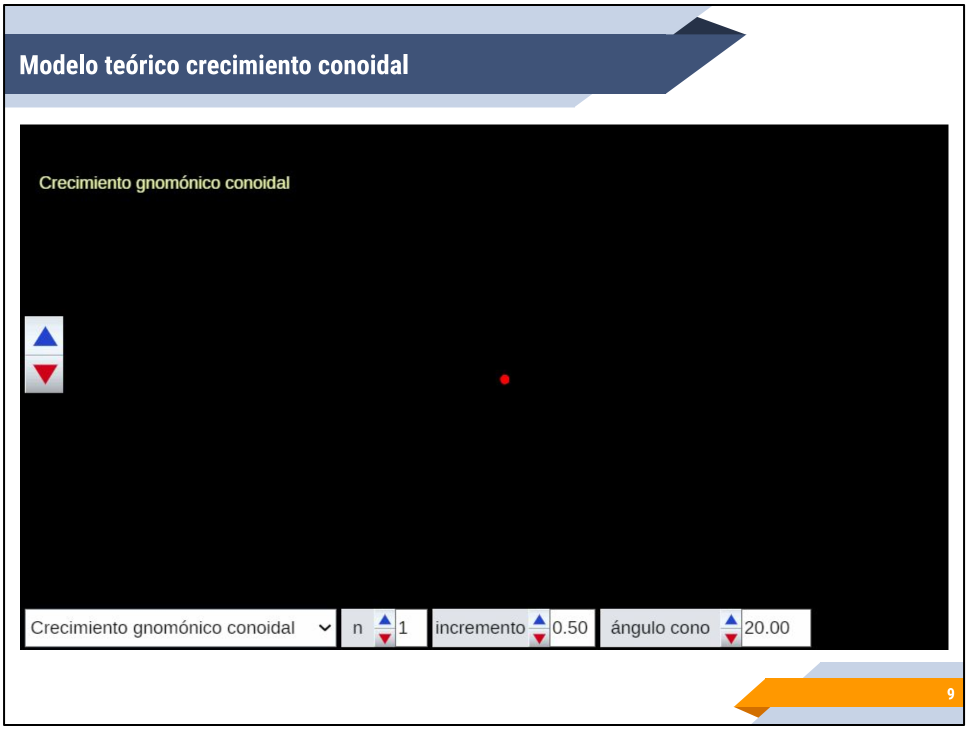
Crecimiento gnomónico 3D



Pero, realmente, para esas conchas ese crecimiento gnomónico acontece en el espacio tridimensional y en esta animación podemos observar la simulación del crecimiento de una almeja.

Tipos de concha

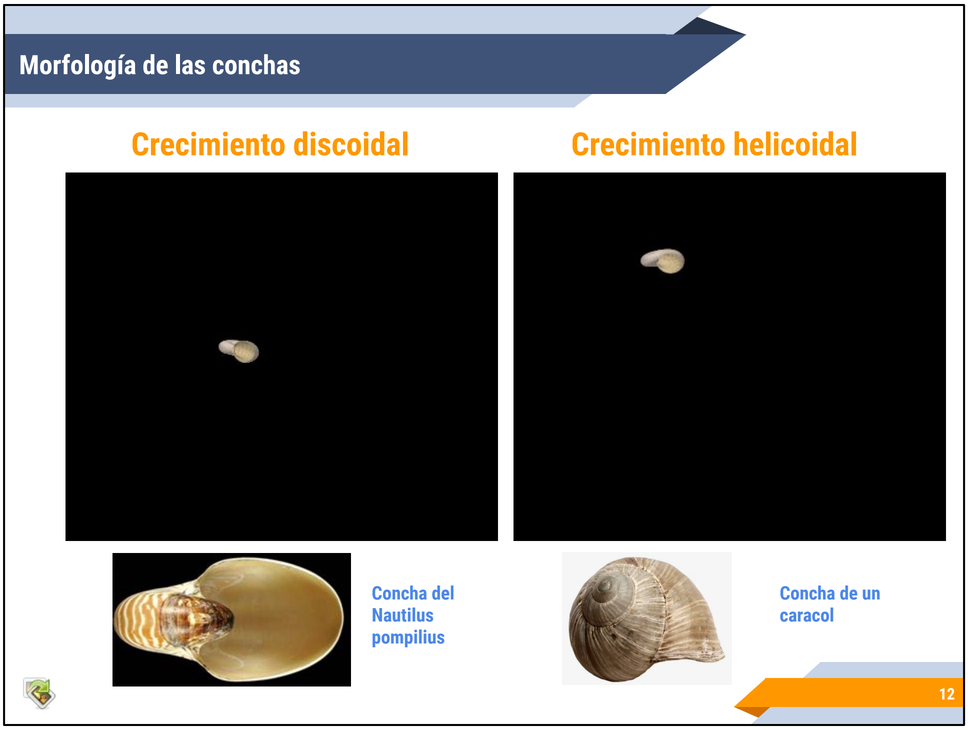
Las conchas de los moluscos adoptan tres formas básicas: Conoidal, Discoidal y Helicoidal.
La almeja anterior aunque pueda que no lo hayamos reconocido se corresponde con un crecimiento de tipo discoidal.



Conceptualmente podemos visualizar una primera aproximación de este crecimiento gnomónico en las conchas pensando en una familia de esferas que incrementa su radio a medida que aumenta la distancia al punto o germen inicial: el polo. Si el centro de la esfera se desplaza siguiendo un segmento rectilíneo obtenemos el crecimiento gnomónico conoidal.

Cuando el centro de cada esfera rota alrededor del polo, incrementando la distancia a él y manteniéndose en el mismo plano se produce el crecimiento gnomónico discoidal.

Y si a ese giro respecto al polo se suma un desplazamiento obtenemos las conchas helicoidales.
En todos los casos conceptualmente lo que tenemos es un cono flexible que podemos retorcer



La concha del Nautilus tiene forma discoidal y los caracoles su concha es helicoidal.

En la modelación del crecimiento discoidal es necesario determinar la forma en la que un punto cualquiera de la concha se transforma en su homólogo al crecer., es decir la curva que describen los puntos homólogos entre sí. Y también hay que hallar la forma de la boca o de cualquier sección. En el caso helicoidal adicionalmente la traslación que se produce hace que la concha esté envuelta en un cono y el ángulo de ese cono es una de las características intrínsecas que determinan la forma de la concha.

La superficie tridimensional de cualquier concha puede considerarse que está generada por la revolución alrededor de un eje fijo de una curva cerrada, la generatriz, la cual incrementa sus dimensiones pero manteniendo la semejanza. Si seleccionamos un punto de esa generatriz, o bien un punto de la región que delimita, y unimos todos los puntos homólogos a él obtenemos otra curva que traza la dirección de crecimiento. Si esta traza está ubicada en un plano perpendicular al eje de giro entonces se dice que la concha es discoidal —que es lo que acontece en el *Nautilus*— y si por el contrario tiene forma de una hélice cónica se dice que la concha es turbinada o helico-espiral. Como generatriz puede considerarse cualquier sección de la concha, sea paralela, normal o con cualquier inclinación respecto al eje de giro. Usualmente se considera la sección transversal obtenida por el corte con un plano que contenga al eje de giro y suele coincidir con la forma de la boca de la concha siempre que ésta se ubique en un plano.

Morfología y fisiología básica del Nautilus, términos

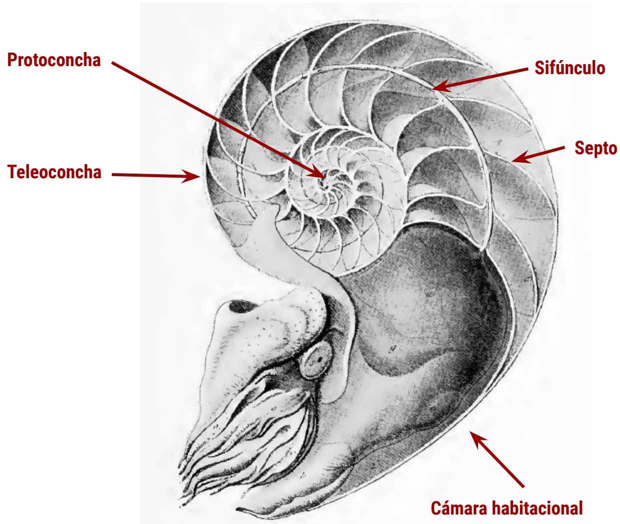
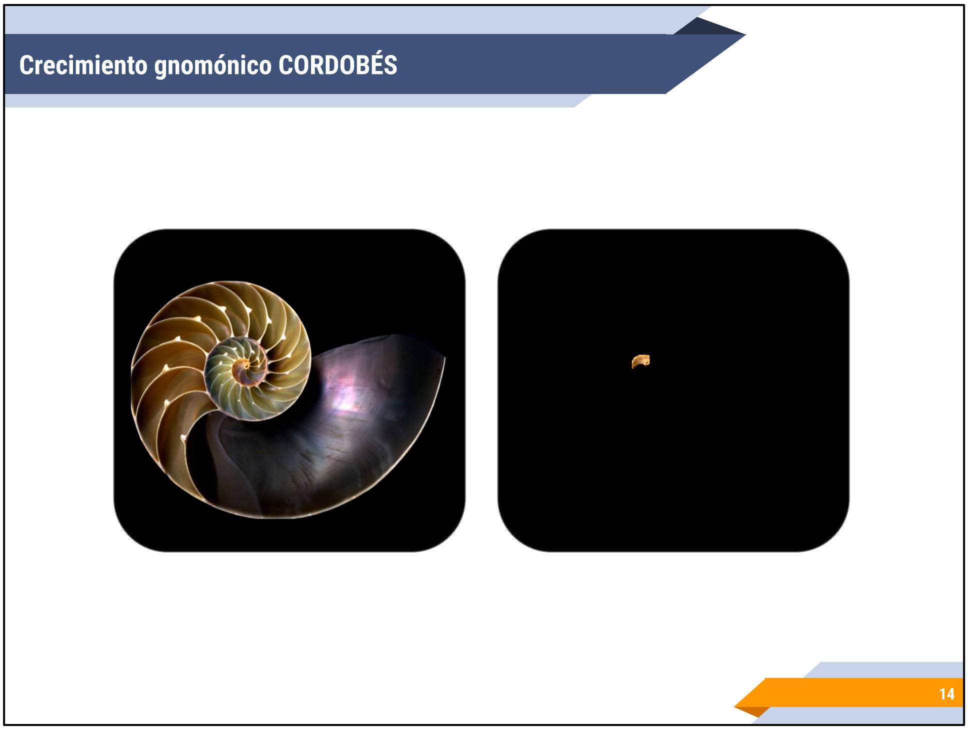


FIG. 411.—THE SHELL (IN SECTION) AND SOFT PARTS OF THE PEARLY NAUTILUS (*Nautilus pompilius*), FROM OWEN.
(From B. B. Woodward's "Life of the Mollusca" [Methuen].

- Concha discoidal
- Sección espiral

Como acabo de indicar la concha del Nautilus tiene un crecimiento discoidal y su sección tiene forma de una espiral.

La vida embrionaria y larvaria se ubica en la protoconcha o cámara inicial y la teleoconcha se corresponde con el crecimiento durante el periodo juvenil y adulto.
La parte que presenta cámaras llamada fragmocono y los tabiques que conforman las cámaras se denominan septos los cuales se intersecan con la pared del fragmocono en la sutura.
El sifúnculo une las cámaras del fragmocono y fisiológicamente es el encargado de vaciar de agua esas cámaras y llenarlas de gas, proporcionando un dispositivo de flotación que facilta que nadando pueda desplazarse. No es que vacie y llene a voluntad para subir o bajar, ese desplazamiento se realiza nadando en la dirección deseada. Como tejido que es, el sifúnculo rara vez se conserva, sin embargo sí suelen observarse los agujeros o cuellos septales por donde pasa.
La cámara más externa es la cámara habitacional del Nautilus.
En ella podemos contabilizar el número de ciclos o verticilos.



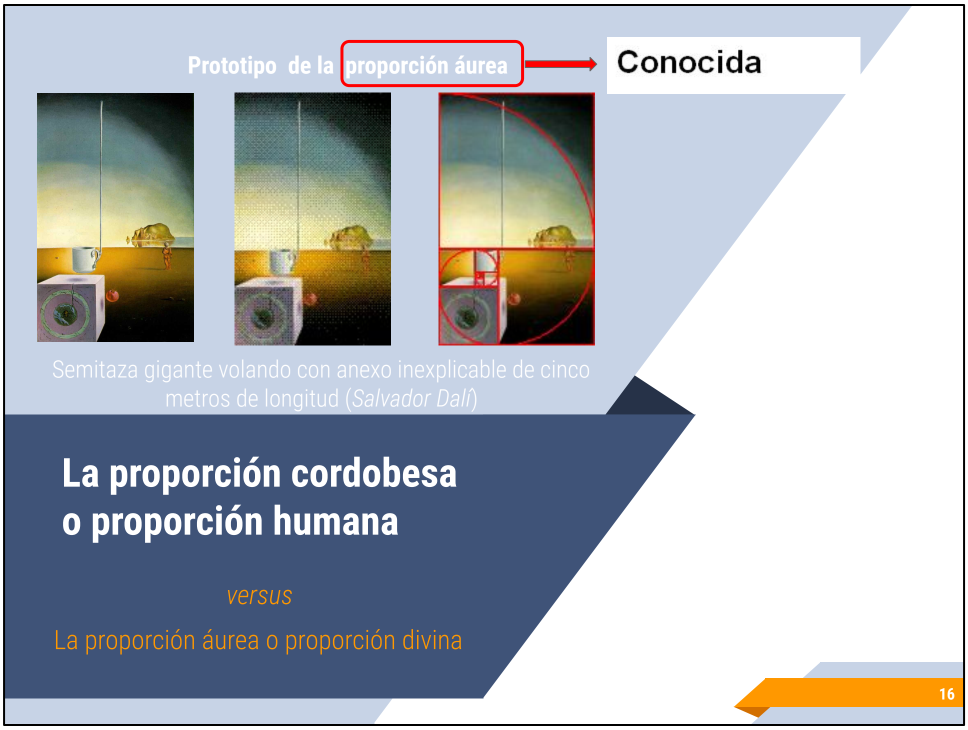
Pero de los múltiples detalles que podemos observar y observaremos, no se impacienten, destaquemos primero cómo podemos intuir su crecimiento autosemejante mediante la adición de cámaras, un crecimiento gnomónico que calificamos como “cordobés”. Pero ¿por qué cordobés?

Cordobés es el gentilicio de los habitantes de la provincia española en la que nací y de la que vengo: Córdoba. Y como he indicado en el título de la conferencia, el Nautilus en su crecimiento es paisano mío, también él en cierto sentido es cordobés. No es porque su hábitat sea el entorno del mío, nada más lejos, ya que él habita actualmente en el área Indo-Pacífica, casi en las antípodas de donde yo lo hago habitualmente, sino porque su crecimiento sigue el canon o proporción cordobesa, proporción que fue bautizada con este gentilicio porque fue detectada en Córdoba. Así pues, el Nautilus y yo compartimos nuestro cordobesismo, pero en la preparación de esta conferencia he comprobado que los bogotanos y los cordobeses también tenemos elementos en común...

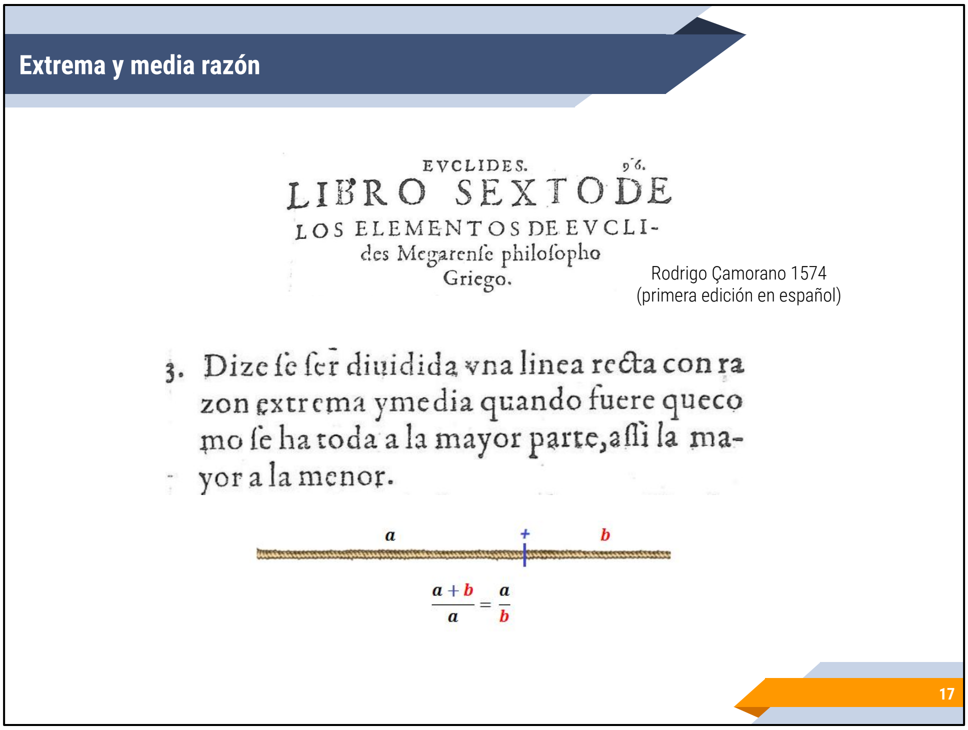
pues compartimos o tenemos una parte de nuestra historia.

Cordobés fue Jiménez de Quesada, aunque algunos sitúan su ascendencia en la vecina provincia española de Granada, en Santa Fe, donde se formalizan las capitulaciones que configuran el germen del viaje de Colón. Y cordobés también era Sebastián de Belalcázar.

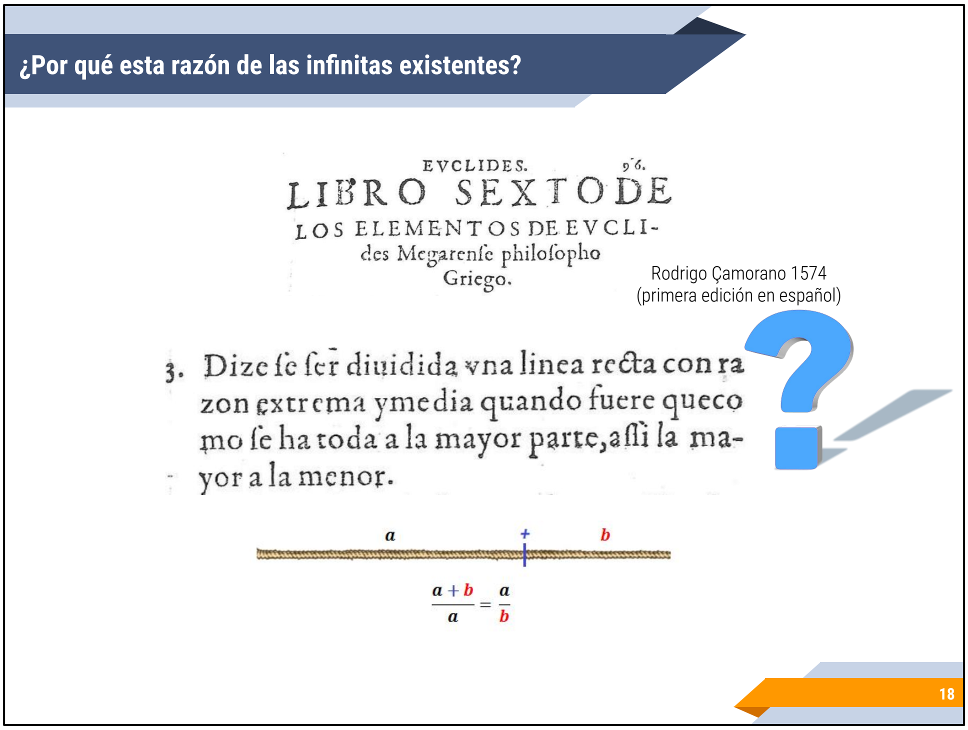
Y casualmente hoy estamos en el salón “Reyes Católicos”



Pero ¿qué o cuál es la proporción cordobesa? La proporción cordobesa que también es denominada como proporción humana al compararla o confrontarla con la proporción divina. Esta proporción divina es muy bien conocida, laureada, deseada, ambicionada, admirada, querida, alabada, sublimada, espléndida, magnífica, soberbia, notable, sorprendente, fascinante, extraordinaria y, lo mismo que Dios, es omnipresente, está presente en todas partes a la vez… o al menos eso dicen, o bien algunos hacen que parezca eso.



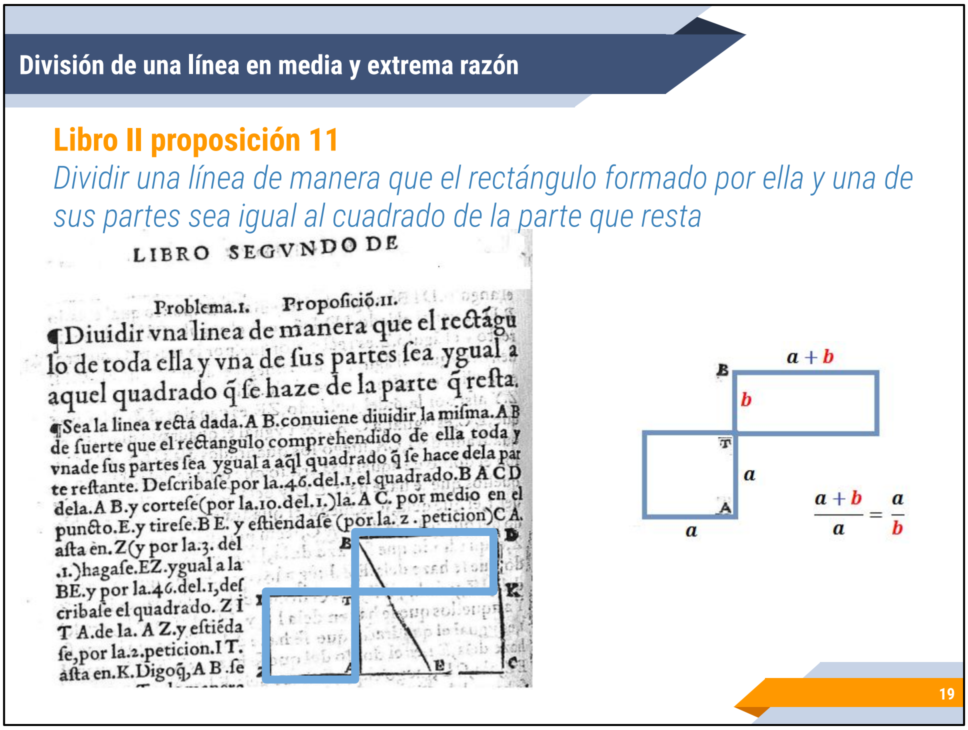
Bueno hay que reconocer que la proporción áurea tiene más años que los 969 años que vivió Matusalen y que Euclides ya la definió en el libro sexto de “Los Elementos” hace 2300 años al definir la división de un segmento en razón extrema y media.
Así pues, la euclidiana razón extrema y media, como se refleja en la imagen de la primera edición en español de “Los Elementos” de Euclides”, o como ahora estamos acostumbrados a decir: extrema y media razón, aparece como tal en la definición tercera del libro sexto: “Dícese que una línea recta está dividida en extrema y media razón cuando la línea entera es a la mayor como ésta es a la menor”. Y aparece así ¡de repente!, sin anestesia alguna, entre la simple definición de figuras semejantes y de la altura de un triángulo o de un paralelogramo..
¡Oooooo léeeeeeee! ¡No, no estoy de broma! Como matemático me maravilla y sale de mi garganta gritarle a Euclides: ¡torero!, ¡torero!, ¡torero!... O como dicen en la ópera de Carmen, la divulgadora de la imagen tópica de España y en particular de Andalucía:¡Toreador! ¡toreador!¡toreador!
Pero me dirán ustedes: ¿por qué esta manifestación de euforia? Pues porque esa expresión u otra análoga es la que con frecuencia se callan nuestros alumnos, por respeto o temor, cuando en nuestras clases hacemos planteamientos análogos al aquí expuesto. Situaciones en las que somos más prestidigitadores, magos, que docentes. Ahora recuerdo a un profesor de mis años de licenciatura que la primera palabra que siempre decía al llegar a clase, en lugar de ¡buenos días!, era ¡Teorema! y a partir de ella encadenaba su discurso y razonamiento cual soliloquio o monólogo a la vez que llenaba sus pizarras de interminables cadenas de símbolos, hasta que pronunciaba su despedida, no con un coloquial adiós, sino finalizando con “como quería demostrar!... y nosotros mascullábamos: ¡hasta el próximo teorema!



Yo, ante situaciones como ésta, lo que suelo preguntarme o la pregunta retórica que formulo es: ¡Euclides! ¿por qué de las infinitas razones posibles te fijas en una tan particular? ¡Euclides, me asombra el conejo que sacas de tu chistera!

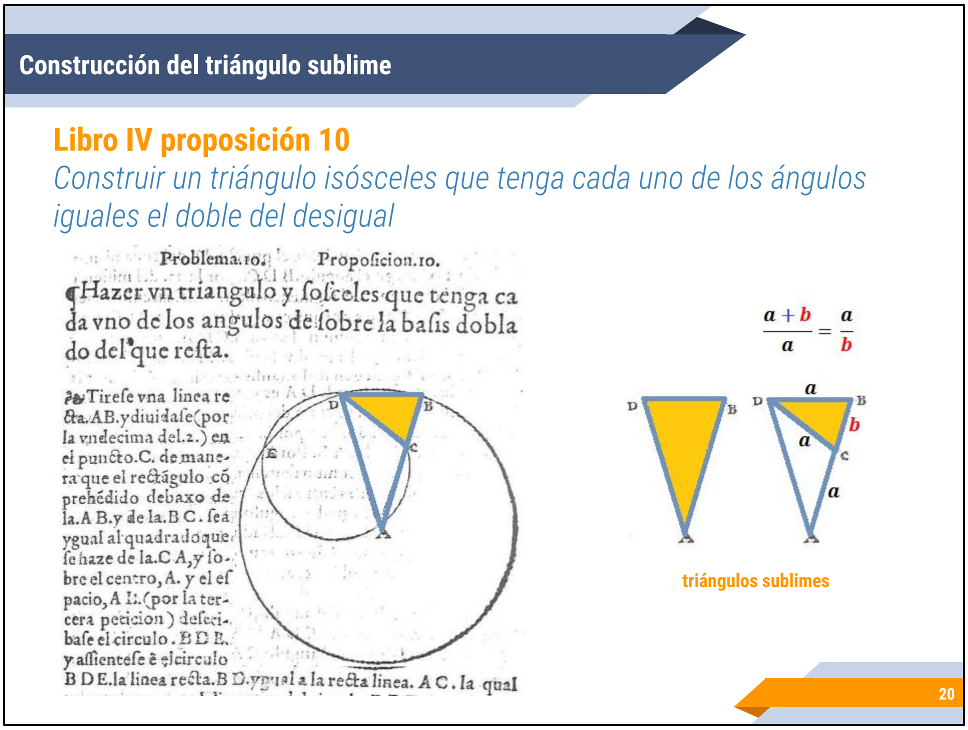
Y perdonen mi tuteo y familiaridad con él, pero es que hemos compartido muchas horas juntos.
Pedirle al instaurador del método axiomático, a aquel que ha servido de guía y modelo secular de cómo abordar y realizar la presentación académica de resultados matemáticos, que debería habernos justificado o motivado el por qué de su interés en la extrema y media razón es como pedirle peras al olmo.
Nosotros, en general, en la difusión de nuestras investigaciones solemos reproducir el ocultismo euclidiano y, al establecer el rigor académico como prioritario, hacemos que se hilen los resultados de una manera diferente a la forma en la que hemos llegado a ellos. Esto acontece en nuestras investigaciones y también en nuestra docencia poniéndose en evidencia cuando en nuestra clases algún alumno nos dice o comenta: ¡¿pero eso a quién se le ocurre?!

¡Euclides, no te critico! o al menos mi crítica es constructiva porque he aprendido mucho contigo, pero si me hubieras marcado el objetivo o la causa seguro que hubiera aprendido más... O, quizás, ahora me estoy dando cuenta, ¿te adelantaste al constructivismo y tu objetivo es que yo fuera el que diera la respuesta? ¡Oh! ¡qué buen docente!,Pero siempre hay un riesgo: ¡mi respuesta puede que no coincida con la tuya!



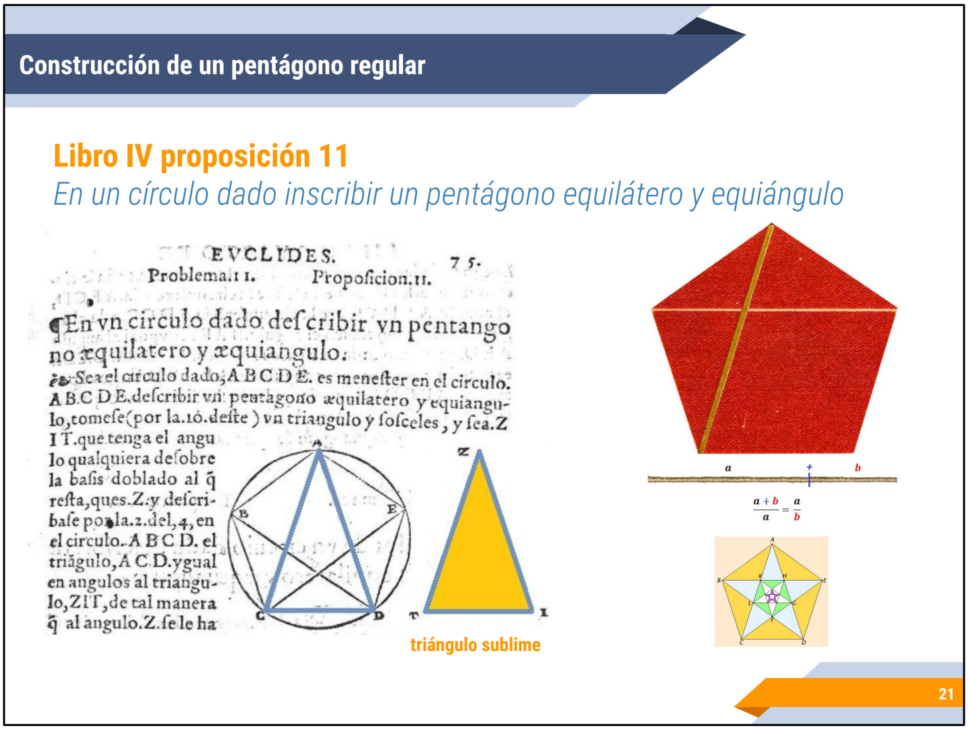
Siguiendo el orden deductivo euclidiano, en la proposición undécima aparece el objetivo de “dividir una línea de manera que el rectángulo formado por ella y una de sus partes sea igual al cuadrado de la parte que resta. Que no es más que la división en media y extrema razón. Pero ahí no hay un motivo, ni un porqué de su objetivo.

Todo un rocambolesco planteamiento similar a lo que acontece en nuestras aulas. ¡Realmente aprendimos bien de Euclides!



No es hasta el libro cuarto, que es el que trata sobre figuras inscritas y circunscritas en una circunferencia, cuando nos encontramos una aplicación de la división anterior en media y extrema razón. En la proposición décima Euclides plantea la construcción de un triángulo isósceles que tenga cada uno de los ángulos iguales el doble de del desigual. Ese triángulo ¡cómo no! se denominó posteriormente ¡triángulo sublime! Y su construcción requiere de esa partición en media y extrema razón. Los lados de ese triángulo siguen esa proporción.
Tenemos ya al menos una motivación de esa extraña división ya que es necesaria para obtener este triángulo particular.

Este triángulo sublime nos lo encontraremos más adelante en esta conferencia y veremos que Euclides no necesitaba la siguiente proposición.



En la proposición undécima,es cuando este triángulo sublime tiene su utilidad ya que en base a él se construye el pentágono regular, en el que dos diagonales consecutivas se cortan en media y extrema razón.
Previamente en ese libro se ha construido de manera sencilla el triángulo equilateral y equiangular e igualmente el cuadrado y en la siguiente construcción la del pentágono se ve que surgieron las dificultades y requirió toda esta artillería matemática para su logro.
Todo gran esfuerzo produce exaltación y gozo y no es de extrañar que este logro se magnificara a lo largo de los siglos. Y los pentagramas se hayan usado como iconos identificadores de grupos o sectas.

Pero la alegría constructiva se les acabó pronto ya que el hexágono regular es trivial su construcción a partir del triángulo equilátero, pues construido un polígono regular es trivial la construcción del polígono que tiene el doble de lados, pero el heptágono supuso una indigestión al igual que el eneágono y endecágono ¡qué ahora bien sabemos no son contruibles con regla y compás! Un mal rato que justifica aún más esa exaltación del pentágono y de esa proporción que se distingue y se le da nombre propio en el libro sexto de las proporciones. ¡Extrema y media razón!

Ante lo antes esbozado no es de extrañar que cuando Luca Pacioli tiene alcance a los resultados citados y a los de “Los elementos” en general, su estudio le catapulte a escribir el libro que tituló “La divina proporción” al referirse a la media y extrema razón.
Él la cataloga y asciende a la divinidad porque encuentra varias analogías que se corresponden por semejanza con Dios mismo.

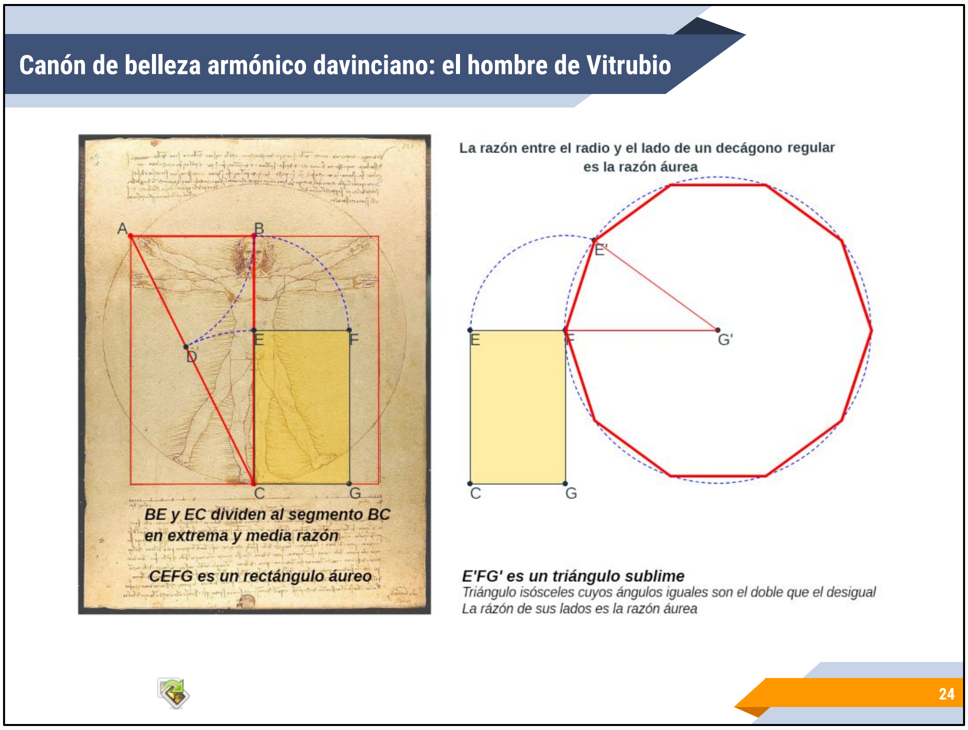
- La primera que es una y nada más que una, al igual que Dios es uno y sólo uno.
- La segunda es que en la proporción intervienen tres términos al igual que la Santísima Trinidad son tres sustancias en una sola.
- La tercera es que es inconmensurable, irracional, no es expresable en cantidad racional, al igual que Dios no puede ser entendido por nosotros con palabras.
- La cuarta es que como Dios no puede cambiar y está en todas partes.
- La quinta que como Dios es la quinta esencia del universo, la que da el ser a los cuatro elementos: tierra, agua, aire y fuego, la proporción divina lo es para los cinco poliedros regulares que los representan y sin ella no puede relacionarse e inscribirse en una esfera

Y, Pacioli, en su euforia, asigna a la proporción divina infinitos efectos. Entre ellos el efecto noveno lo cataloga como excelso el cual es el hecho antes citado de que dos diagonales consecutivas de un pentágono regular se cortan en media y extrema razón. Y continúa hasta el efecto decimotercero o dignísimo efecto porque sin su ayuda no podría construirse el pentágono. Y ahí detiene su descripción por reverencia a Nuestro Salvador Jesucristo y sus doce apóstoles.
Es obvio que esa pasión de Pacioli, que antes yo he parafraseado irónicamente al asignar diferentes calificativos a la divina proporción, es el pilar sobre el que se basa y el que provoca en la Edad Moderna y Contemporánea esa admiración por su divina proporción. Y más teniendo en consideración que este efecto se ve ponderado por su amigo Leonardo da Vinci que ilustra su trabajo y por Albert Durero, como veremos posteriormente.

Pero no puedo dejar de comentar que a esta euforia pacioliana indirectamente y directamente ¡también contribuimos los cordobeses!
Los Elementos de Euclides, al igual que gran parte del saber científico griego, nos ha llegado a través de traducciones al árabe de manuscritos en griego, lo cual acontece en torno a la época del Califato de Córdoba (siglos X y XI), luego fue traducido del árabe al latín (siglo XII) y ampliada su difusión mediante su impresión a finales del XV. La primera edición impresa es de 1482 (época de Luca Pacioli) y se basó en versiones árabes y, en particular, en una versión latina atribuida a Adelhard de Bath quien estuvo en Córdoba a principios del siglo XII. A él se le atribuye el primer caso de espionaje científico porque se infiltró en la escuela matemática cordobesa y además del cero, que le debió de saber a poco o nada, llevó consigo un ejemplar de Los Elementos.

Posiblemente éste fue el camino a través del cual Fibonacci en el siglo XII tuvo conocimiento y difundió el sistema de numeración posicional gracias a ese cero indo-arábigo. Y también cómo, posteriormente, Luca Pacioli pudo construir su eufórica exaltación de la “proporción divina”. Y si añadimos el apoyo recibido por el genial Leonardo da Vinci y también de Albert Durero podemos comprender por qué la proporción divina comienza una transmisión idílica en las Edades Moderna y Contemporánea que potencia su idealización y admiración hacia ella.

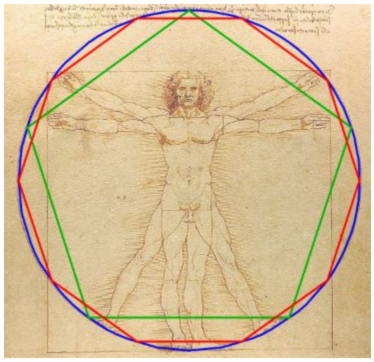
¡Euclides se hizo cordobés!

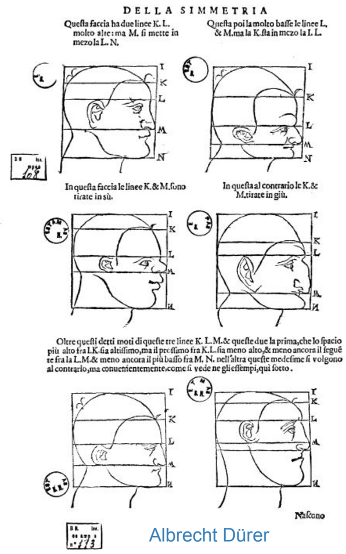


Da Vinci que ilustró "La divina proporción" adoptó ésta como pauta para la elaboración del canon de belleza humano que reflejó en su dibujo del hombre de Vitrubio. En él podemos ver cómo equipara la altura de un hombre a la longitud entre sus brazos y a partir del cuadrado que determinan estas dos magnitudes y apoyándose en el eje de simetría de ese cuadrado que es eje de la figura humana procede a dividir este segmento en extrema y media razón, donde el ombligo es el punto que determina esta partición. La proporción divina queda reflejada en el cuerpo humano y el ombligo se configura como el centro armónico de esta belleza. Surge la denominación de proporción armónica.
Pero adicionalmente pongamos de manifiesto que toda razón entre dos cantidades puede representarse geométricamente mediante un rectángulo. En este caso el rectángulo armónico y que fue posteriormente denominado áureo o dorado. Ese rectángulo se correspondería con la flexión de nuestro cuerpo por la cintura. Y adicionalmente, como ya indicamos, se corresponden con los lados del triángulo sublime y con diez triángulos sublimes se construye un decágono regular. De hecho Euclides en el momento que construye el triángulo sublime podría haber construido el decágono y uniendo vértices alternos de éste haber obtenido el pentágono.

La razón entre el radio y el lado del decágono regular y la razón entre la distancia de los pies al ombligo y de éste a la cabeza es la razón divina. Así pues, la belleza queda ligada a la proporción, puede ser esquematizada mediante rectángulos y también asociada a polígonos regulares.

Las proporciones en la Naturaleza





Albrecht Dürer

"Platón y Euclides sabían perfectamente que ninguna cosa se puede conocer en la naturaleza sin la proporción y que el objeto de todos los estudios consiste en buscar las relaciones de una cosa con la otra"
(Luca Pacioli)

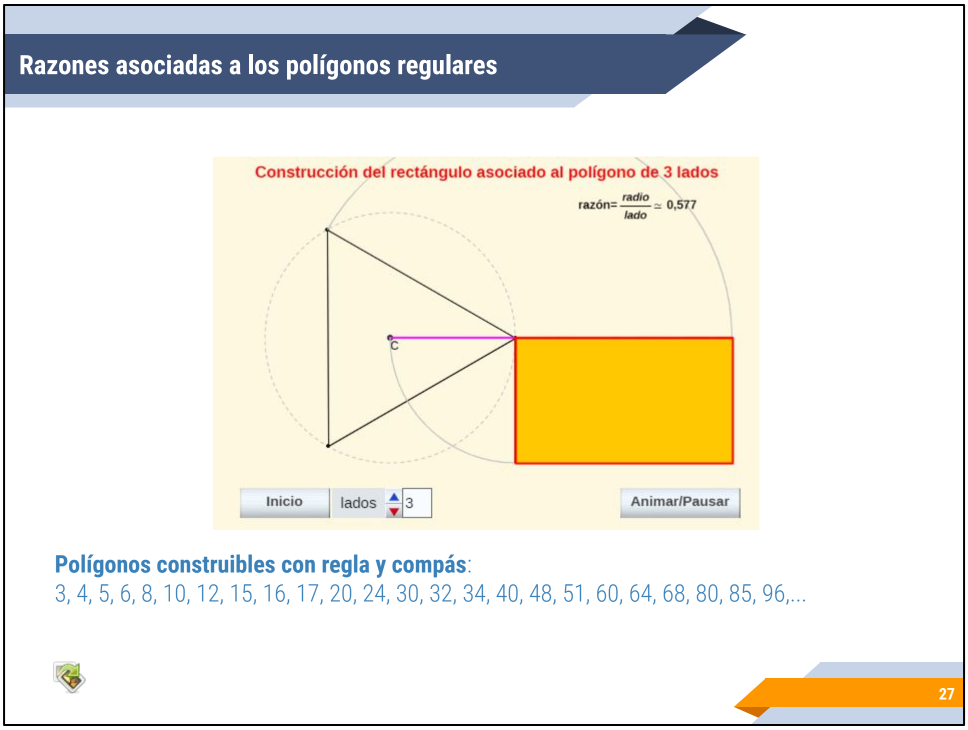
Por cierto, ¿Hacia adonde apunta el brazo inclinado del hombre de Vitrubio? ¡Sí, efectivamente sería el vértice del decágono! ¿Y la amplitud de las piernas abiertas? Un ángulo central del pentágono.

Pacioli afirmaba que "Platón y a Euclides sabían perfectamente que ninguna cosa se puede conocer en la naturaleza sin la proporción y que el objeto de todos los estudios consiste en buscar las relaciones de una cosa con la otra".
¡Es evidente la influencia de Pacioli en su amigo Leonardo y en su contemporáneo Alberto Durero! ¡Y en todos!

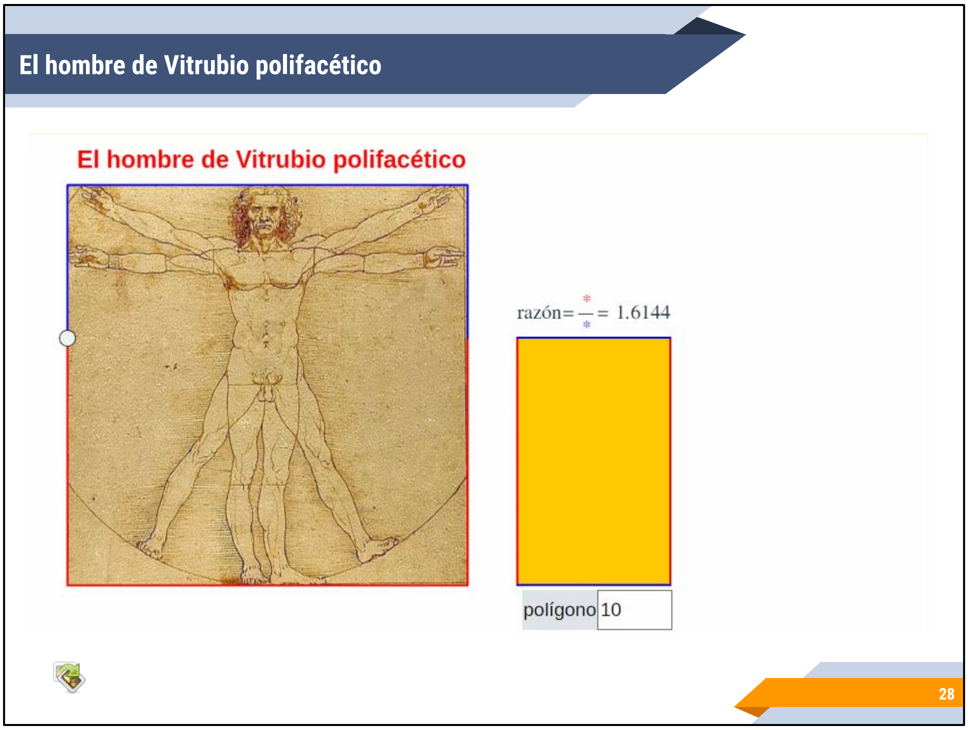
Belleza ¿equivale? a proporción divina

Para que algo sea bello ¿ha de seguir la proporción divina?.

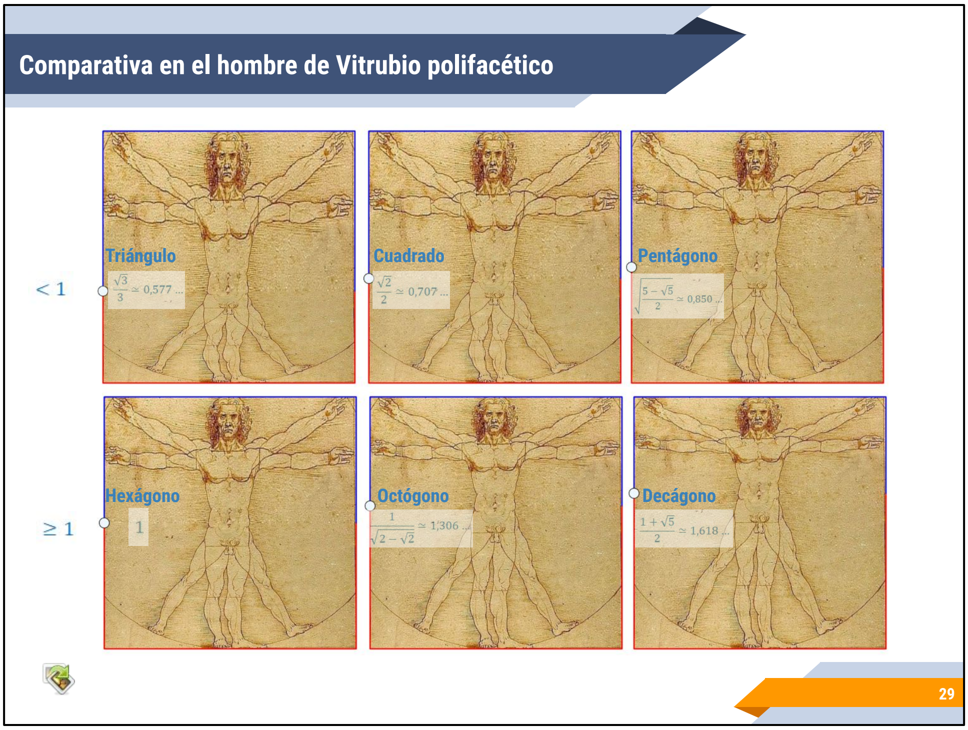
Parece evidente buscar el conocimiento a través de la búsqueda de las proporciones, pero lo que no es tan evidente es que esa búsqueda se convierta en una obsesión por encontrar la proporción divina en todas las cosas. **Para que algo sea bello ¿ha de seguir a la fuerza la proporción divina?**



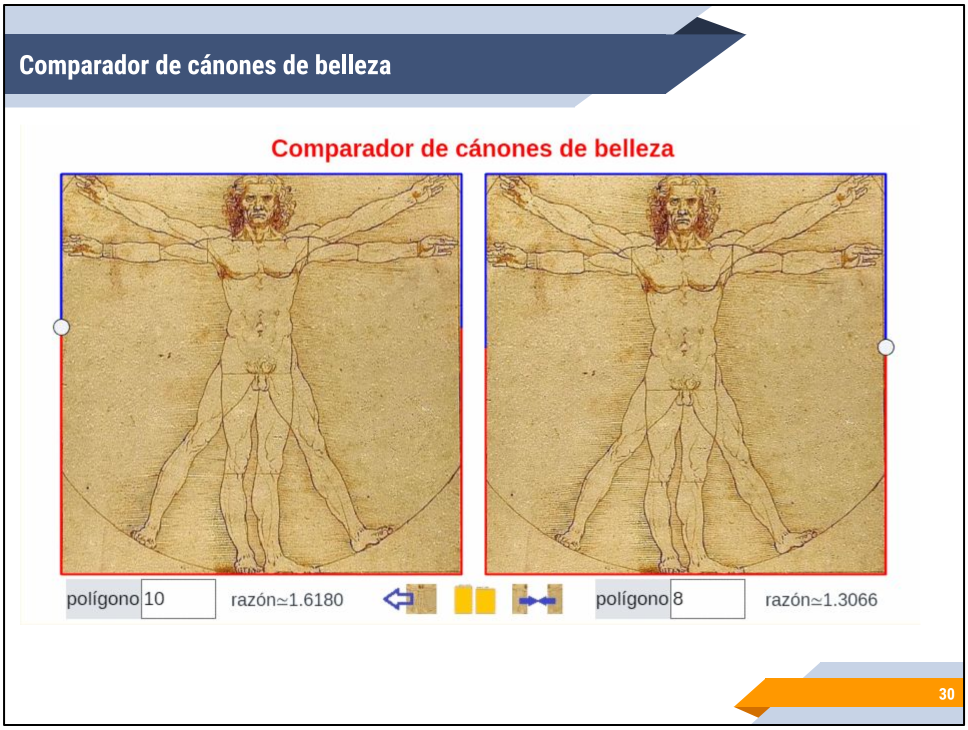
Tratemos de dar respuesta buscando otros cánones de belleza y para ello sigamos el camino de Leonardo da Vinci, estableciendo ciertas pautas.
En el hombre de Vitrubio hemos establecido una relación entre la razón de la medida de los pies al ombligo y de éste a la cabeza, y lo hemos relacionado con la razón o módulo de un rectángulo y además, también, con el radio y el lado de un polígono regular: el decágono.
Así pues, en general, dada una razón siempre podemos siempre asociarle una familia de rectángulos semejantes cuyos lados guardan esa proporción. Pero esa proporción no tiene porqué tener relación con ningún polígono regular. Por tanto, abordemos el camino inverso y entre todas las infinitas razones posibles consideremos una infinidad numerable de ellas: las que se corresponden con los polígonos regulares.
No obstante, a nivel teórico y ubicándonos en el purismo euclidiano hemos de excluir aquellos polígonos que no son construibles con regla y compás, es decir, aquellos cuyo número de lados son los indicados en la diapositiva para polígonos de menos de cien lados.
Así pues, para cada uno de esos polígonos asociamos un rectángulo en el cual podemos observar cómo la razón crece y para el dodecágono ya la razón es próxima a dos.



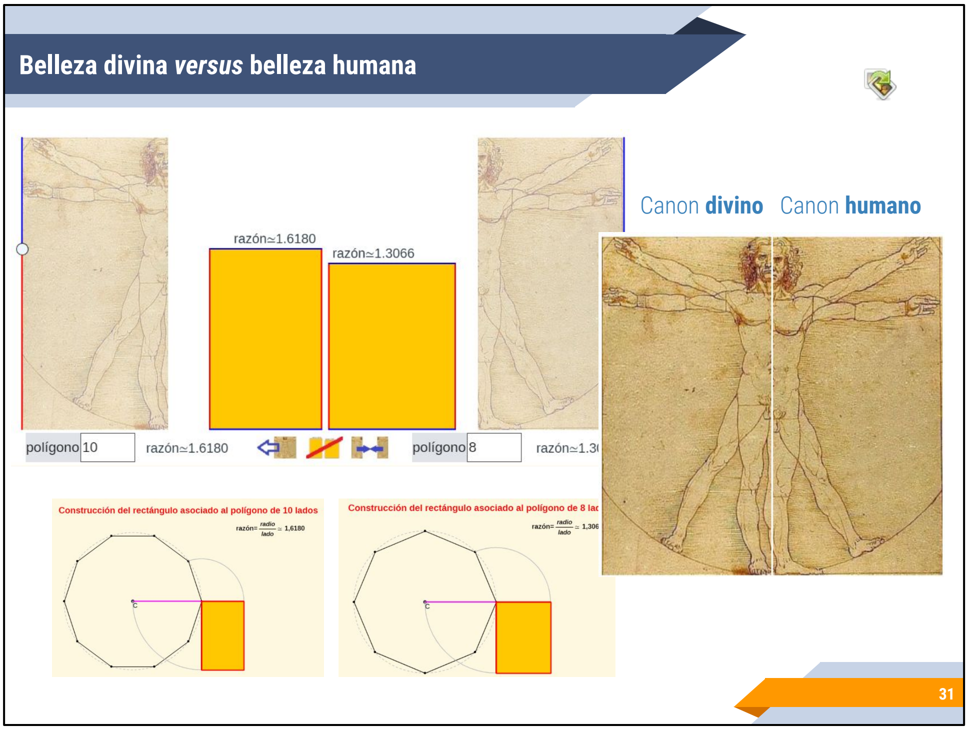
Si trasladamos esto al hombre de Vitrubio, que ahora lo convertimos en polifacético pues adopta todas las caras o formas que deseeemos sin más que cambiar la posición del ombligo, podemos observar que para polígonos de doce lados o más su traslación al hombre de Vitrubio conduce más a una desproporción que a una armonía, una situación de hombres patilargos, es decir, con un largo de piernas mayor al usual.



Y realizando una comparativa, reflejada en la diapositiva, los tres casos primeros se corresponden con situaciones de hombres con menor largo de las piernas que del tronco y cabeza, iguales en el caso del hexágono y mayor largo de piernas en el octógono y decágono, sin llegar a ese carácter patilargo de valores superiores.
En el recurso interactivo enlazado podemos observar lo reflejado en esta imagen tanto para los polígonos construibles como aquellos que no los son.



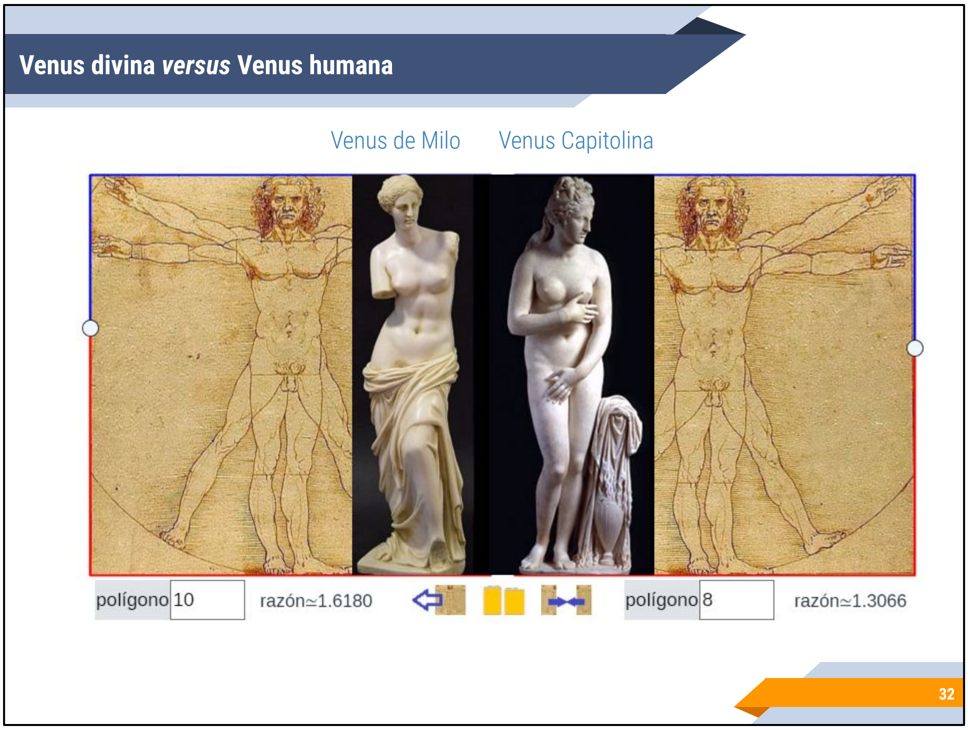
Así pues, entre las diversas alternativas surgen dos posibles cánones de belleza procedentes de razones poligonales. La primera es la belleza armónica davinciana ligada a la proporción divina y otra una belleza ligada al octógono.



Y por contraposición al canon divino diremos que tenemos el canon humano y a la razón correspondiente al cociente entre el radio y el lado del octógono la denominaremos razón humana.

El canón de belleza humano se caracteriza porque las piernas son algo más cortas en relación al tronco y cabeza.

Si nos fijamos en los dos rectángulos, el rectángulo divino o áureo es más estilizado y el rectángulo humano algo más rechoncho



¿Pero quién es más bella? ¿La venus de Milo o la venus Capitolina?
Pacioli lo tendría claro tomaría su compás áureo y seleccionaría la Venus de Millo.
¿Y cuál es su elección?

¿Y ahora, quién les parece más bello? ¿El Apoxiómenos de Lísipo o el David de Miguel Ángel?

Resulta irónico e incluso gracioso contraponer el hombre de Vitrubio de Leonardo y el David de su rival Miguel Ángel y más si incluimos cierta inventiva acerca de si Miguel Ángel diseña su David obviando a toda costa el modelo de Leonardo. No es más que mera especulación, pero… la imagen habla por sí sola.

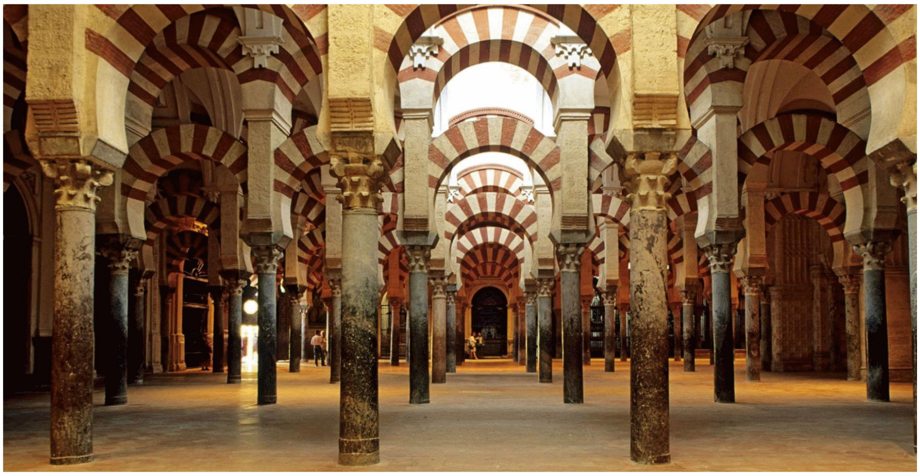
La Mezquita-Catedral de Córdoba

Permítanme que les lleve de nuevo a Córdoba. En la imagen tienen una vista áerea de la mezquita con el patio de abluciones o patio de los naranjos, las naves, el muro de la quibla y las bóvedas de la macsura y del mihrab... y embebida en ella la catedral de Córdoba, realmente la catedral nueva y también la antigua. Y a la derecha una de las puertas laterales, la de Alhaken II por la que accedía directamente desde su alcázar a la macsura .

La mezquita de Córdoba es patrimonio de la humanidad y Córdoba es la ciudad que más nombramientos patrimonio de la humanidad acumula: la mezquita, el casco histórico, los patios como patrimonio inmaterial y el año pasado se logró el nombramiento de Medina Azhara, ciudad califal que ya hemos citado antes.

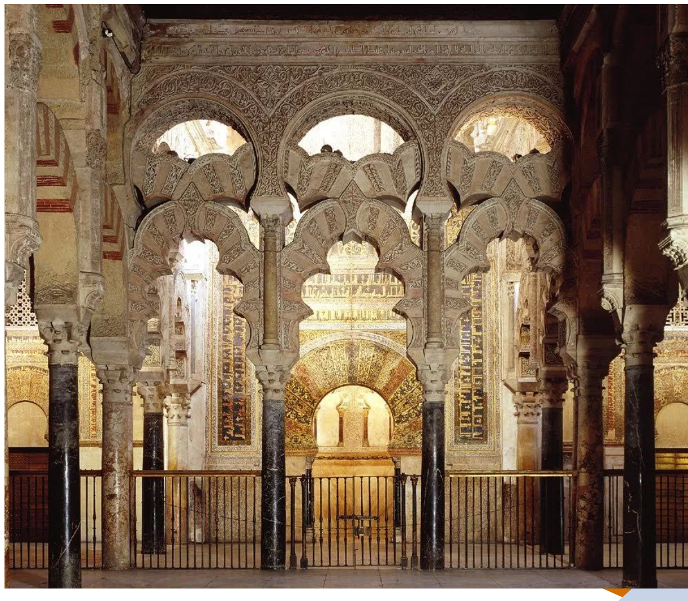
¡Les invito a visitarnos! Pero no piensen que estoy en un intervalo publicitario dentro la conferencia. No, no es ese el objetivo, aunque también sirva para ello.

Naves, bosque de columnas y arcos



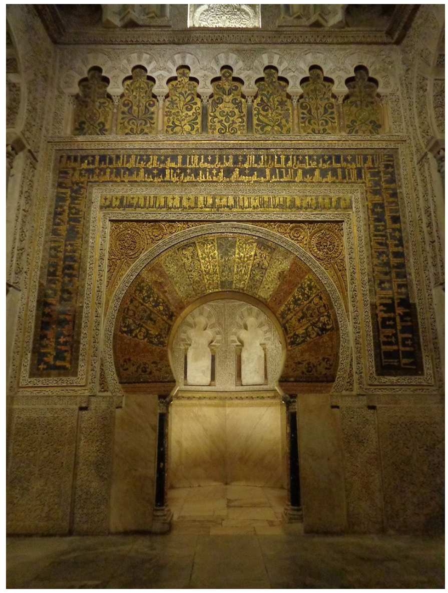
Les llevo a la mezquita de Córdoba y les adentro en sus naves, en su bosque de columnas y arcos de medio punto y de herradura con sus inconfundibles y únicos colores identitarios, esos alternantes blancos y rojos de la piedra y el ladrillo que los componen. Y les adentro en este entorno porque aquí, con seguridad, estuvo nuestro espía científico. Sí el que se llevó el cero junto a los Elementos de Euclides… pero no lo cito de nuevo para reprender su hurto, no, los cordobeses y los andaluces en general somos desprendidos, por algo el lema de nuestra comunidad es: “Andalucía por sí, por España y la Humanidad”, lo mismo que el de nuestra Red Educativa Digital Descartes es: “trabajando altruistamente por la comunidad educativa de la aldea global”.

Arcos polilobulados en la antesala de la macsura



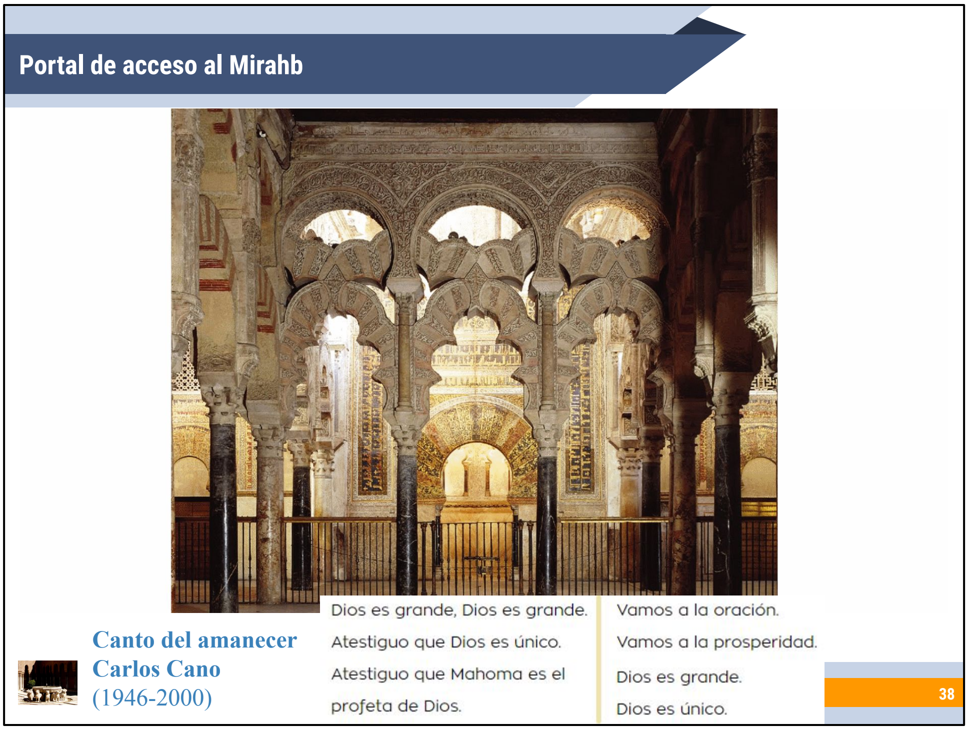
Les recuerdo a nuestro espía porque con seguridad cuando se adentró en la mezquita quedaría tan empequeñecido, perdido,...

Arco de acceso al Mirahb



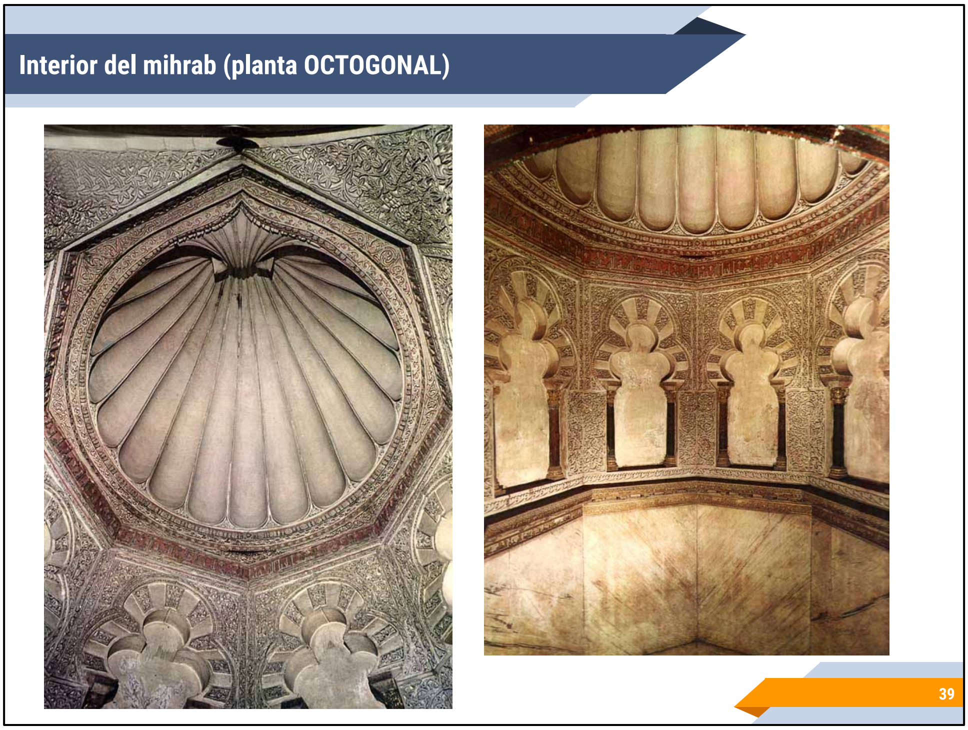
sorprendido, asombrado, maravillado desconcertado, obnubilado, estupefacto,... y ¡paro! porque me estoy pareciendo a Pacioli al describir no los efectos de la proporción divina, sino los efectos de la belleza humana en un pobre ser humano.

En la diapositiva tienen el arco de acceso al mihrab que sirve de guía de orientación para que los creyentes dirijan su rezo hacia la Meca. Es la puerta simbólica de acceso a la Meca. No obstante, el mihrab de la mezquita de Córdoba no está orientado hacia la Meca, pero ese es otro tema que es muy interesante y en el que no puedo adentrarme porque no quiero verme como Evariste Galois diciéndoles: “no me da tiempo, no me da tiempo…”



“Canto del amanecer de Carlos Cano”.

En la diapositiva tienen el arco de acceso al mihrab que sirve de guía de orientación para que los creyentes dirijan su rezo hacia la Meca. Es la puerta simbólica de acceso a la Meca. No obstante, el mihrab de la mezquita de Córdoba no está orientado hacia la Meca, pero ese es otro tema que es muy interesante y en el que no puedo adentrarme porque no quiero verme como Evariste Galois diciéndoles: “no me da tiempo, no me da tiempo…”

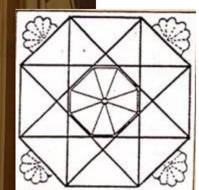


Y aquí tenemos el interior del mihrab de planta ¡OC-TO-GO-NALI! y curiosa bóveda en forma de concha.

Pero aquí no pudo estar nuestro espía, pues es el sanctasanctórum. Pero en su atolondramiento y desconcierto tuvo que dejar escapar a su vista otro elemento arquitectónico intrínseco en la mezquita de córdoba: ¡La bóveda cordobesa! la cual tiene como base matemática el OC-TÓ-GO-NO. Si nuestro espía la hubiera contemplado ¡también se habría llevado consigo el saber matemático que contiene! y Luca Pacioli habría tenido un dilema al tener que elegir entre el decágono y el octógono y entre las dos proporciones asociadas a los mismos.

Nuestro espía no reparó que en la parte más lujosa de la mezquita, en la denominada ampliación de Alhahen II hay cuatro bóvedas que por su características constructivas permiten abrir huecos que proporcionan ventilación y luz, los denominados lucernarios. En la imagen vemos el lucernario de la denominada capilla de Villaviciosa que es donde después de la reconquista cristiana estuvo ubicada la primera catedral. Los elementos constructivos son ocho arcos entrecruzados tres a tres que son los que sustentan la bóveda y permiten incluir esos huecos.
Matemáticamente tenemos como base un cuadrado. Desde los puntos medios se trazan cuatro arcos que determinan un cuadrado inscrito en el anterior. Desde el cuadrado inicial se trazan dos parejas de arcos paralelos que se entrecruzan con los anteriores formando cuatro cuadrados en las esquinas y un nuevo cuadrado inscrito al ya inscrito. En éste se truncan las esquinas construyendo un octógono.
Tenemos una primera muestra constructiva que veremos como evoluciona en las siguientes construcciones. que en su momento fueron pioneras y por tanto tienen su origen en Córdoba.
En las esquinas podemos ver unas bóvedas pequeñas: Una en la que sólo se truncan las esquinas y configura un hexágono, dos que entrecruzan seis arcos formando una estrella hexagonal y una cuarta que puede decirse que es una muestra de la que veremos a continuación y es una mejora de la actual. Aquí parece que se hacen pruebas de los que se quiere hacer después. Como si fuera un muestrario sobre el que seguir indagando.

Bóvedas laterales en la macsura

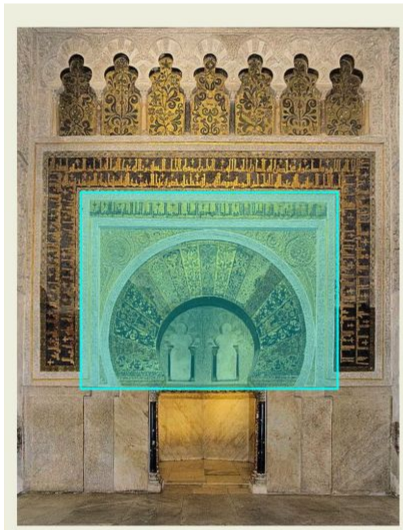


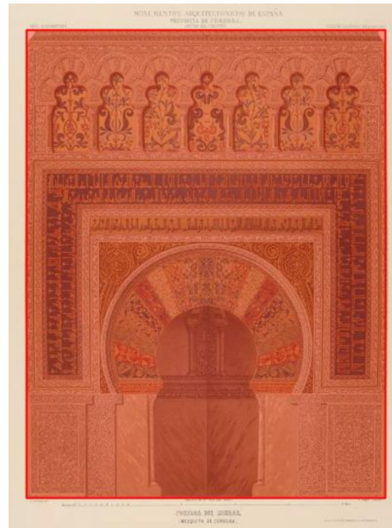
En las dos bóvedas laterales de la macsura se aborda el siguiente orden constructivo. Sobre el cuadrado inicial, se truncan las esquinas configurando la base octogonal de construcción. Se trazan ocho arcos paralelos dos a dos y se obtiene un octógono inscrito. Aquí los arcos se entrecruzan dos a dos.
También se puede plantear como la construcción de una estrella octogonal comenzando en un vértice y saltando a otro vértice dejando dos libres en medio.

En la bóveda central de la macsura, se construye el octógono inicial truncando las esquinas y ahora se unen los vértices alternos construyendo dos cuadrados uno girado respecto al otro y configurando un octógono central. Los arcos se entrecruzan también dos a dos, pero en este caso la ventaja de esta construcción respecto a la anterior es que el octógono obtenido tiene más superficie.

¡La bóveda cordobesa alcanza su esplendor! El canón de belleza octogonal queda de manifiesto ¿verdad?

El rectángulo cordobés



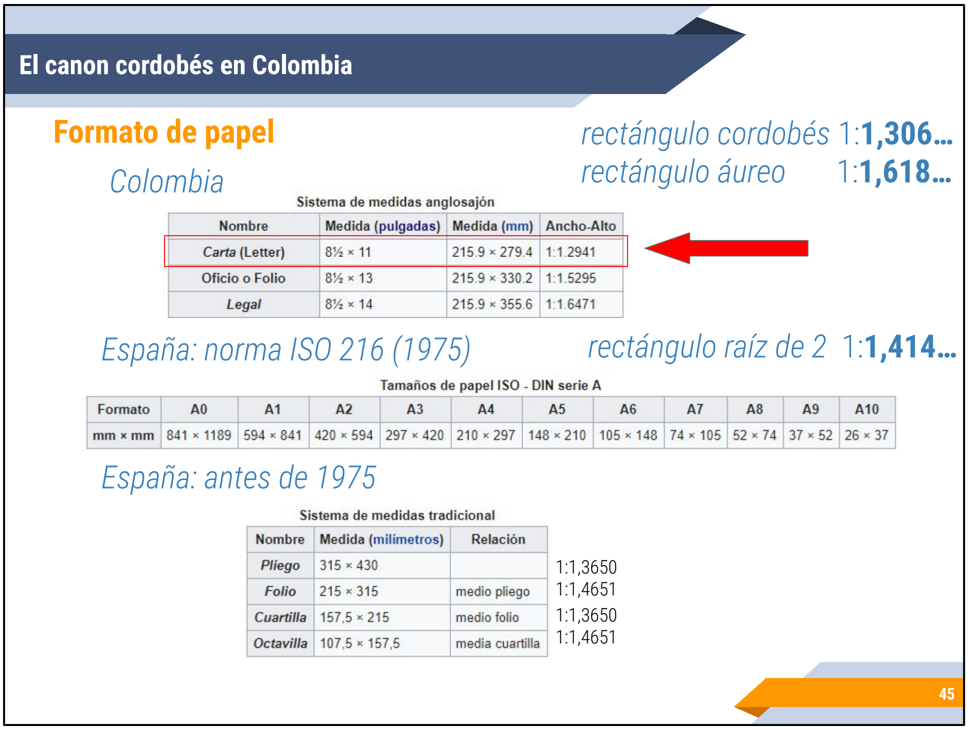


Pero el saber cordobés no queda restringido al uso del octógono

¿Por qué le ha gustado la portada del Mihrab de la mezquita de Córdoba? —presumo que les ha parecido bonita, atractiva y maravillosa—.
Pues yo les ayudo a realizar la traducción matemática de esa sensación positiva. El diseño de ese frontal sigue el canon de la razón entre el radio y el lado del octógono, es decir, hay plena conciencia del uso de esa relación estableciendo proporciones que antes denominamos como canón de belleza humano y que a partir de ahora con toda propiedad podemos y hemos de llamar proporción cordobesa.
Los rectángulos que ven superpuestos sobre la portada son ambos cordobeses.

He usado un dibujo y no directamente la fotografía porque debido a las dimensiones de esta portada y su localización en la zona de la macsura donde en una imagen anterior hemos visto que hay unos arcos polilobulados que la delimitan, no es fácil obtener una fotografía que no deforme la forma de dicho frontal, por ello al tomar como referencia el dibujo veremos que los rectángulos cordobeses se ajustan con precisión, pero en la foto esos mismos rectángulos difieren, magnificándose esa diferencia en la parte superior por la ubicación de la cámara desde la que se tomó esa foto.

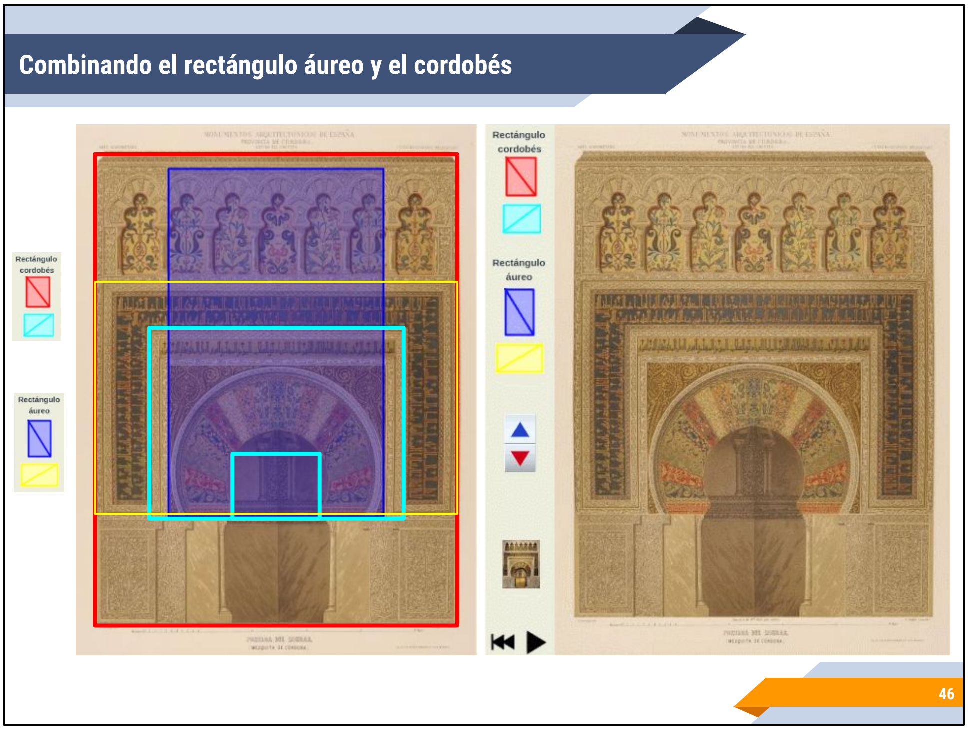
Lo anterior no es una mera casualidad sino que es un mero ejemplo de una acción consciente en base al conocimiento de esta razón cordobesa y que podemos encontrar en numerosos edificios en Al Andalus, pero que no es algo exclusivo de caracter local sino que es un un conocimiento que se transmite y transfiere, algo que es global. Eso sí, el bautismo de esta proporción se realizó en 1973 arquitecto cordobés Rafael de la Hoz y ha quedado reseñada como proporción cordobesa o proporción humana. Hemos tardado en llegar al porqué del calificativo cordobés en el título de la conferencia, pero ya hemos alcanzado ese objetivo.



Y si los bogotanos y los cordobeses tenemos vínculos históricos, podemos poner de manifiesto que Colombia actualmente hay al menos un tema en que los colombianos se muestran más cordobeses que los mismos cordobeses y es el formato de papel que usan. Ustedes mantienen el sistema anglosajón y si mis referencias son correctas el formato usual es el formato Carta que tiene una proporción de 1,29, es decir, escriben diariamente sobre un rectángulo que difiere en altura menos de un uno por ciento del rectángulo cordobés. Y cuando ustedes han de realizar contratos y escrituras entonces se ponen más trascendentes y se acercan al rectángulo divino, será que se ponen temerosos y cuando pasan a cuestiones legales se intuye que el temor nos lleva a pensar en la divinidad.

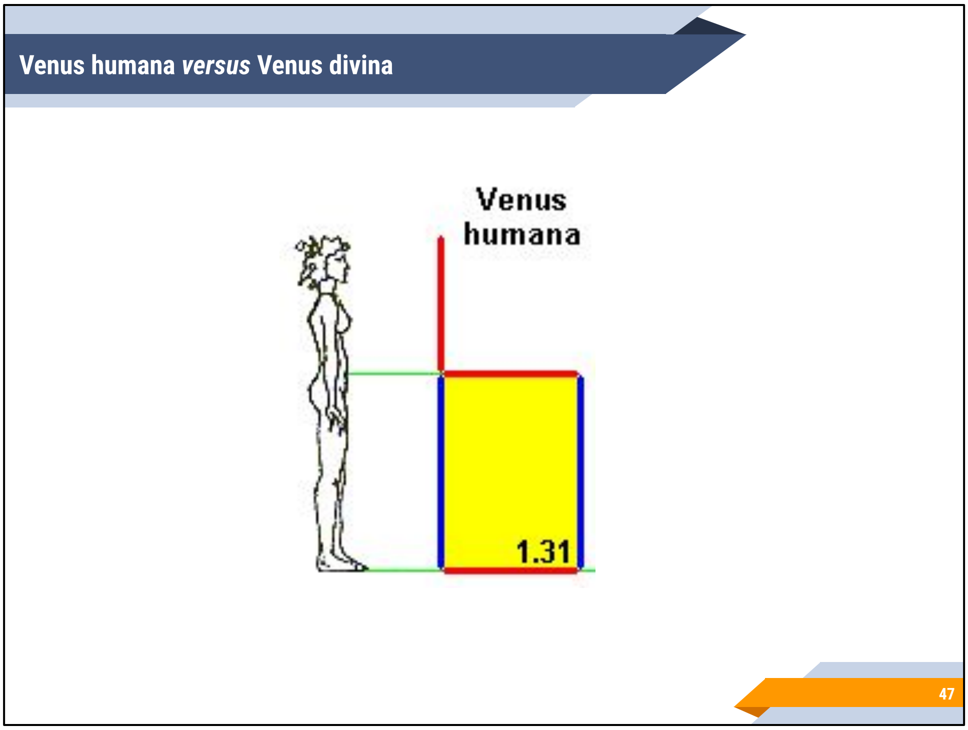
En España se sigue la norma ISO 2016 que se implantó allí en 1975. Usamos los formatos DIN (del Instituto de Normalización Alemán) y que sigue el canon de la raíz cuadrada de dos y que se caracteriza por que un formato se relaciona con otro sin más que proceder a dividirlo por la mitad.

En la España de mi niñez y adolescencia usábamos otros formatos. Se partía del formato pliego con proporción 1,36, es decir, un poco más rechoncho que el rectángulo cordobés y el resto de formatos el folio, la cuartilla y la octavilla se obtenían dividiendo siempre por la mitad. En cada corte se cambia la proporción.



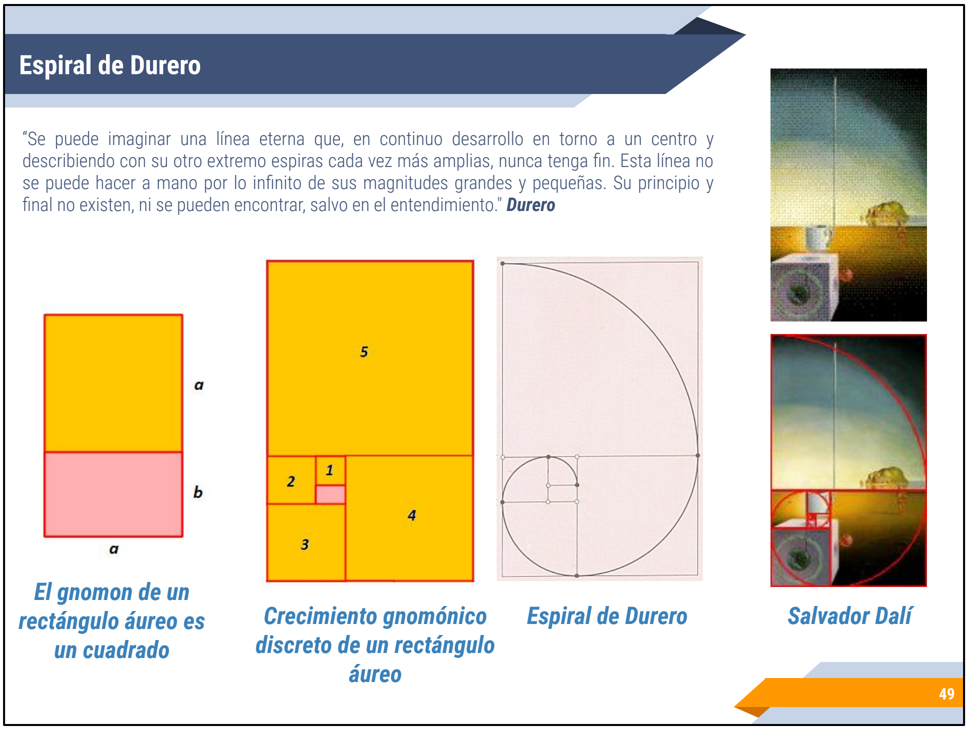
Pero ya les decía que los andaluces somos abiertos mentalmente y si algo es útil y bello por qué no usarlo. Si conocíamos los rectángulos áureos y los cordobeses por qué no combinar ambos. Sí miren que en la portada del Mihrab también podemos encontrar rectángulos áureos.

Y una alternancia o combinación de cánones es lo que realmente acontece en la portada del Mihrab. El rectángulo que enmarca o circunscribe a la portada es cordobés y hemos observado más rectángulos cordobeses sobre ella, pero también podemos detectar rectángulos áureos y la amalgama de ambos cánones de belleza es la que posiblemente logra sublimar su majestuosidad .La belleza no tiene por qué seguir un único patrón o canon, sino que la combinación hábil de dos o más cánones parece dar razón a Aristóteles y el todo es más que la suma de las partes



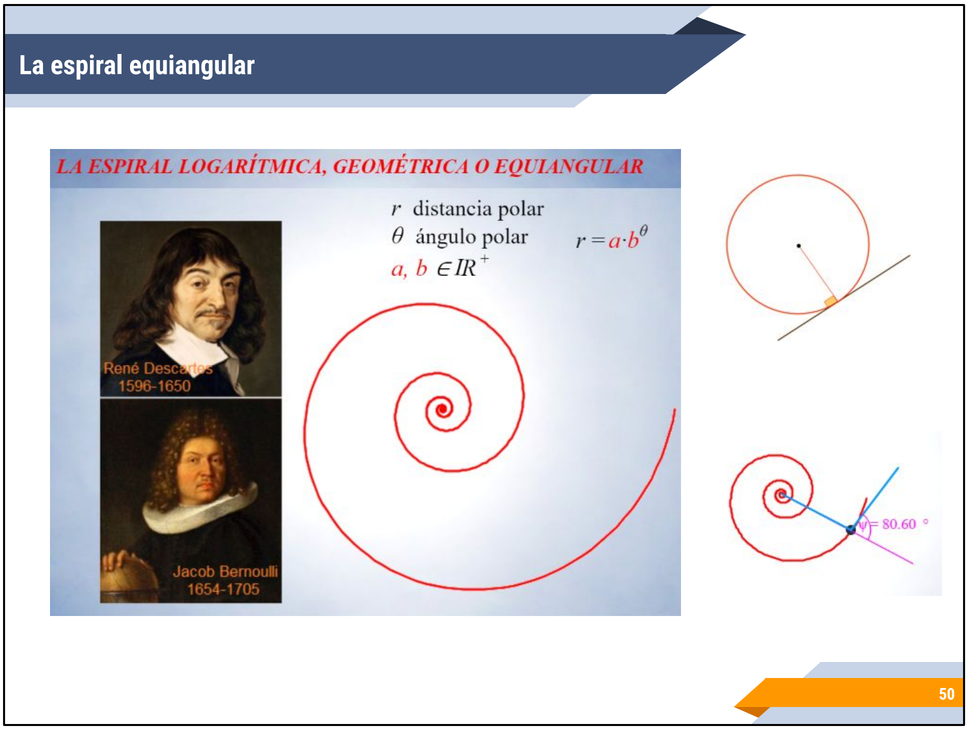
Porque, en general, estamos acostumbrados a adaptar y combinar esas proporciones. ¿Qué es si no la transformación que conseguimos cuando nos subimos a unos tacones o plataformas? Alargamos la distancia desde los pies al ombligo y de esta forma logramos pasar de la proporción humana a la proprorción divina

Establecido qué es la proporción cordobesa y el rectángulo cordobés. Pasemos analizar la espiral logarítmica que es la curva a la que se asemeja la sección de la concha de Nautilus.



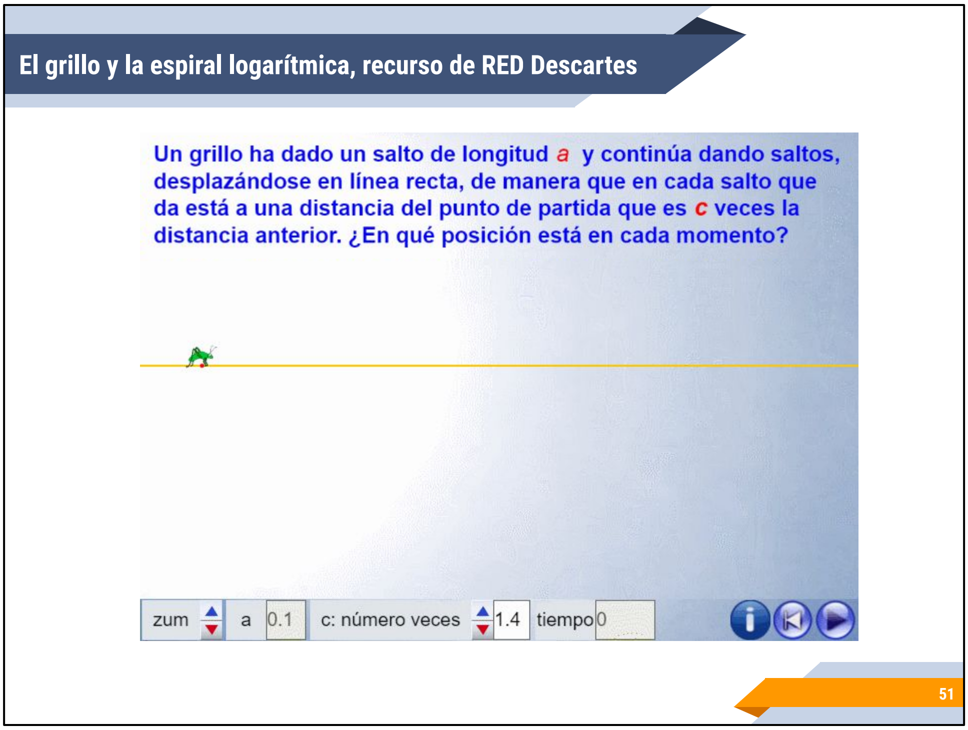
Durero realizó una definición imprecisa de lo que entiende por una espiral y basándose en que el gnomon de un rectángulo áureo es un cuadrado procede a una construcción gnomónica en la que encadena rectángulos áureos en un crecimiento gnomónico discreto. Y enlazando cuadrantes de circunferencias construye la que se denomina "Espiral de Durero".

Hay que tener cuidado con ésta porque usualmente se transmite que esa espiral es la espiral áurea, pero como veremos posteriormente es una aproximación de ella. La propia definición de Durero se contradeciría con la construcción pues en la primera manifiesta que no se puede hacer a mano y en la segunda se construye con regla y compás



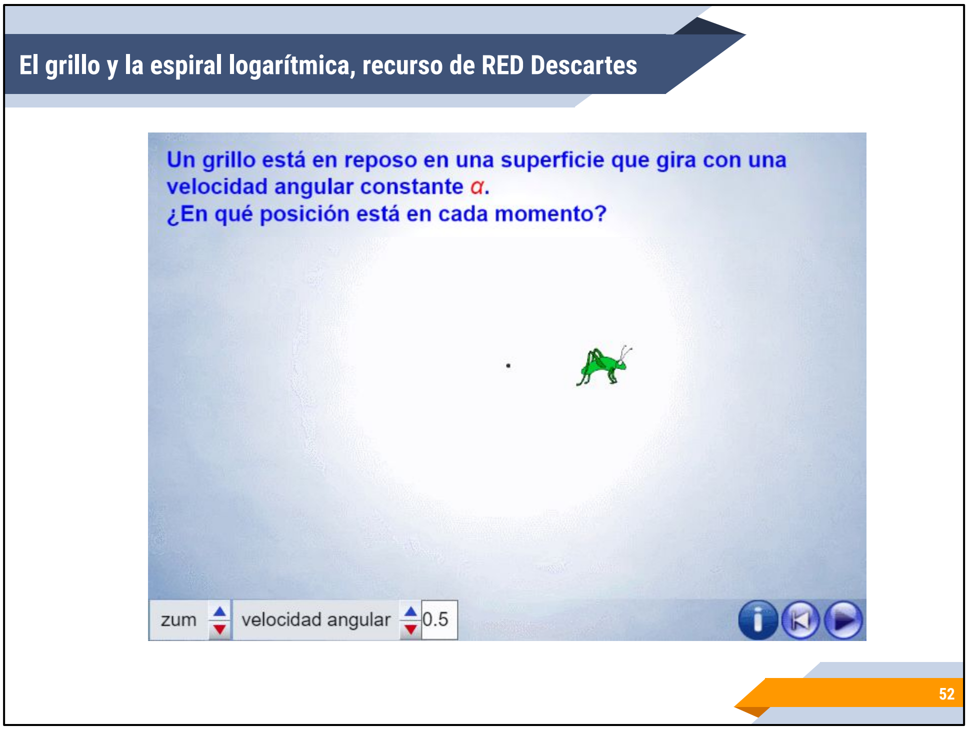
Descartes fue quien efectuó una definición precisa de esta espira. Fijándose en la propiedad equiangular de la circunferencia se planteó generalizar esta situación y determinar cuál es la curva en la que el radio vector en un punto siempre forma un mismo ángulo con la recta tangente. La circunferencia sería el caso particular en el que dicho ángulo es noventa grados sexagesimales.

Jacob Bernouilli fue quien hizo el análisis detallado de la misma y quien la denominó espiral maravillosa.

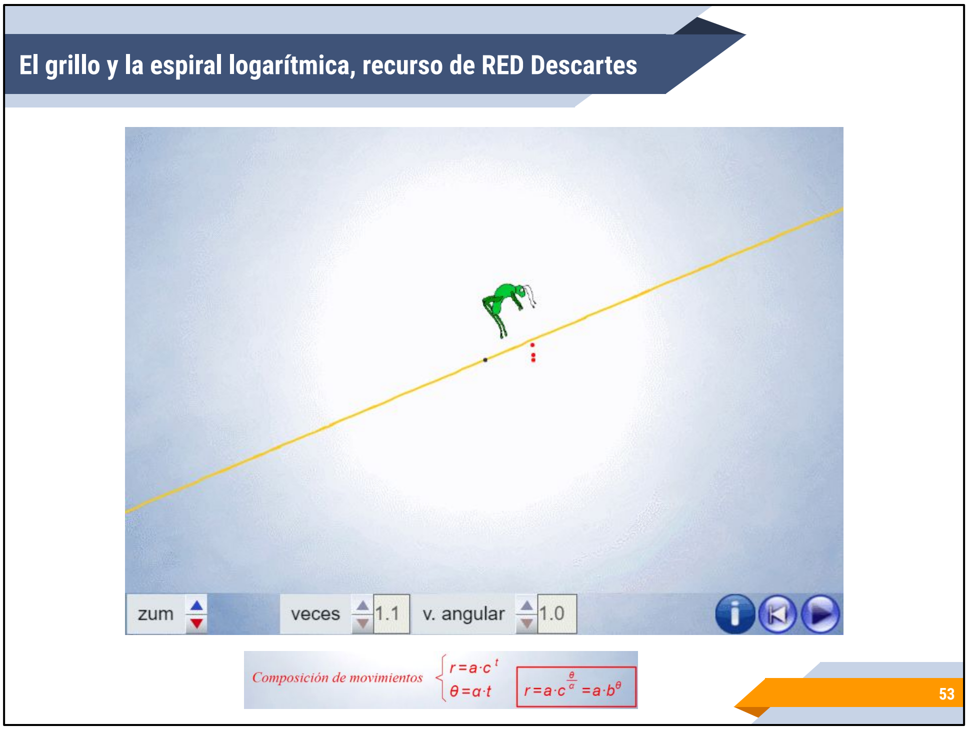


La introducción de la espiral logarítmica puede realizarse de diversas formas. El planteamiento que yo realizo es una construcción dinámica basado en la composición de dos movimientos. Y todo lo que voy a sintetizarlesrespecto a las propiedades de estas espirales pueden consultarlo en la web si buscan el recurso “El grillo y la espiral logarítmica”.

Inicialmente consideremos un grillo que ha dado un salto de longitud a y continúa dando saltos, desplazándose en línea recta, de manera que en cada salto que da está a una distancia del punto de partida que es c veces la distancia anterior, es decir que las distancias al origen están en progresión geométrica. ¿En qué posición está en cada momento?



Y ¿cuál es su posición si está en reposo en una superficie que gira con una velocidad ángular constante?



Y finalmente si se componen los dos movimientos... ¡Ahí tienen a nuestro grillo saltarín!

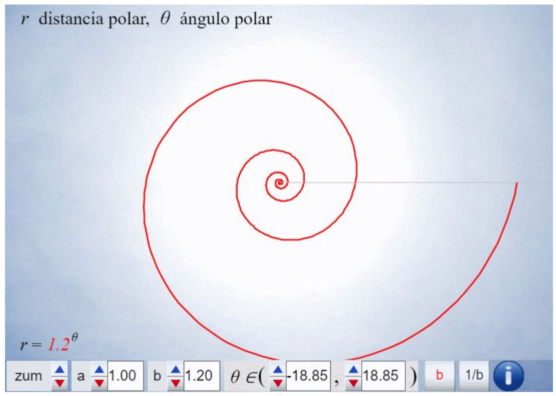
La distancia al punto que denominamos polo viene dada por r=a·b^thita. Thita es el ángulo de giro.

¡Ahí tenemos la espiral logarítmica!

Propiedades de la espiral logarítmica

$r = a \cdot b^{\theta} \qquad a,\ b \in I\!R^{+}$

- a es un factor de escala o **ángulo de retardo** (un giro), pues $a=b^{-\lambda}$ y, por tanto, $r = a\, b^{\theta} = b^{\theta-\lambda}$.

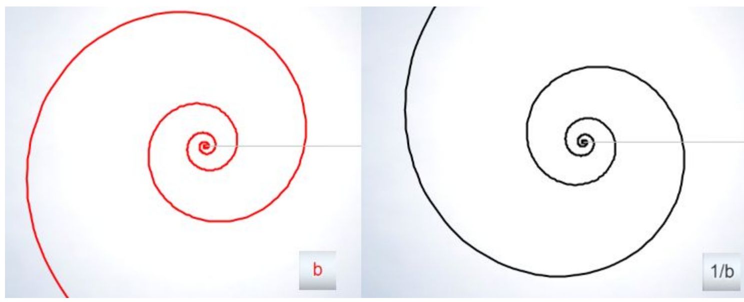


Toda espiral logarítmica puede expresarse en forma polar como r=a·b^thita, donde a es un factor de escala a.
En la imagen al variar el valor de a podemos observar ese cambio de escala. Pero también puede interpretarse un giro o que se le somente a un ángulo de retardo. Esto lo utilizaremos con posterioridad.
 Variando el valor de a por una potencia de base b. El factor de escala puede considerarse que es 1. Ese factor se puede interpretar como un ángulo de retardo o giro de la espiral.

Simetría y crecimiento levógiro y dextrógiro

$$r = a \cdot b^{\theta} \qquad a,\ b \in I\!R^{+}$$

- Para b basta considerar valores mayores que 1, pues para $1/b$ se obtiene la espiral simétrica respecto al eje polar

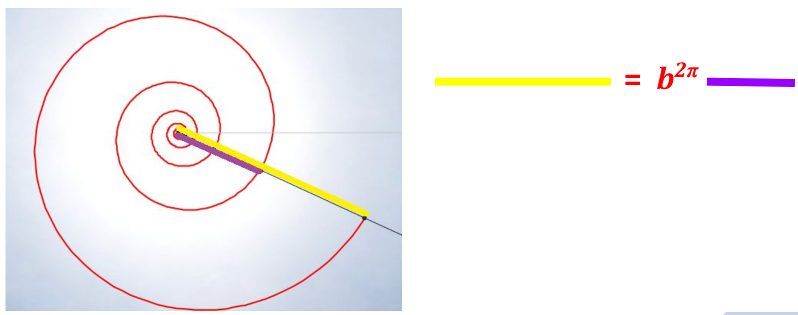


Para su análisis basta considerar valores de b mayores que la unidad, ya que para sus inverso obtenemos la espiral simétrica respecto al eje polar. O lo que es equivalente la espiral en sentido de crecimiento levógiro o dextrógiro.
Cuando b=1 obtenemos como caso extremo de la espiral a la circunferencia.

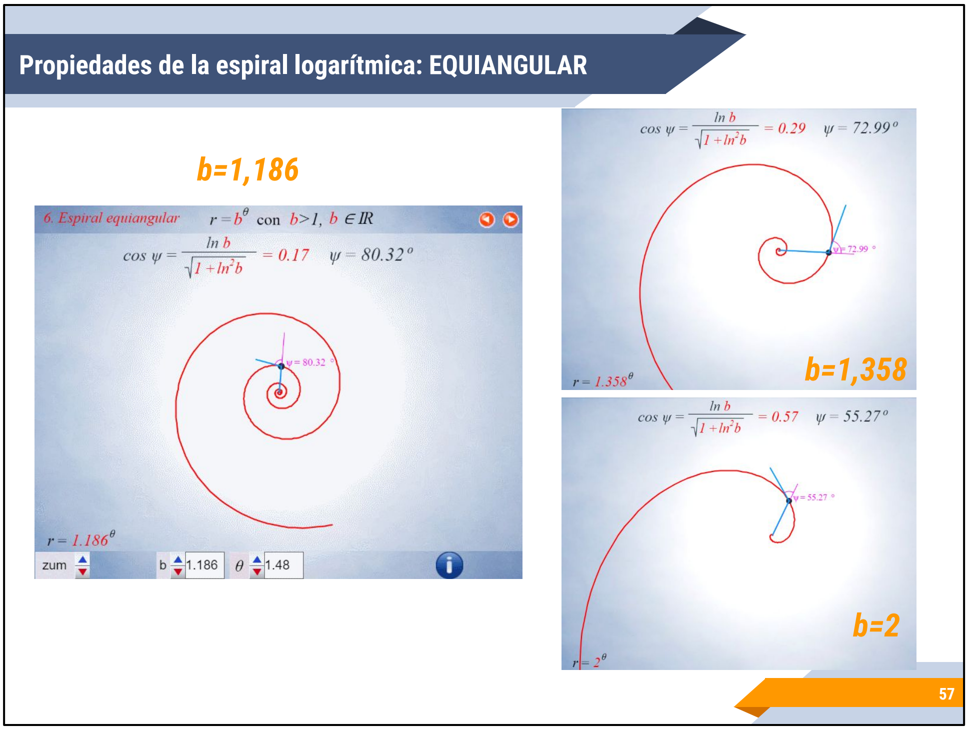
Es geométrica. Factor de crecimiento: $b^{2\pi}$

$$r = a \cdot b^{\theta} \qquad a,\ b \in IR^{+}$$

- Es geométrica porque los puntos ubicados en la misma semirrecta están en progresión geométrica de razón $b^{2\pi}$. Este es el **factor de crecimiento**.



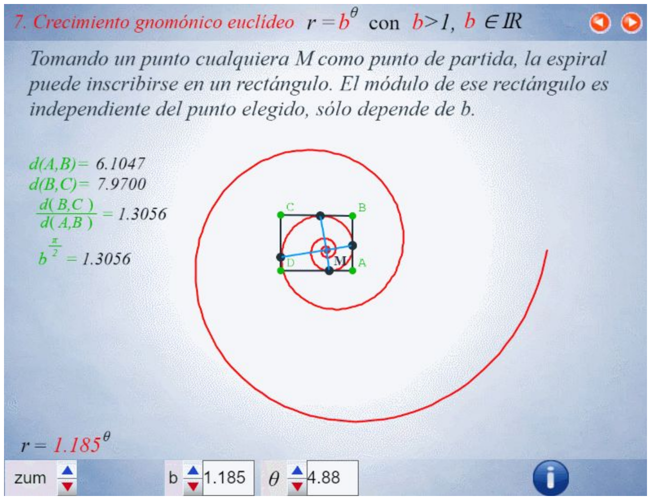
La espiral logarítmica también se dice que es geométrica ya que los puntos de ella que están ubicados en una misma semirrecta están en progresión geométrica. Ya lo indicamos en los saltos del grillo. A la razón $b^{2\pi}$ se le denomina factor de crecimiento, lo que crece la espiral en cada vuelta.



Como hemos indicado es equiangular y el ángulo sólo depende de la base b. A medida que b crece el ángulo que forma el radio vector con la recta tangente es menor. Y el factor de crecimiento es mayor, simplificando digamos coloquialmente que la espiral es más abierta.

Espiral logarítmica cordobesa

Rectángulo circunscrito a una espiral logarítmica. Módulo: $b^{\pi/2}$



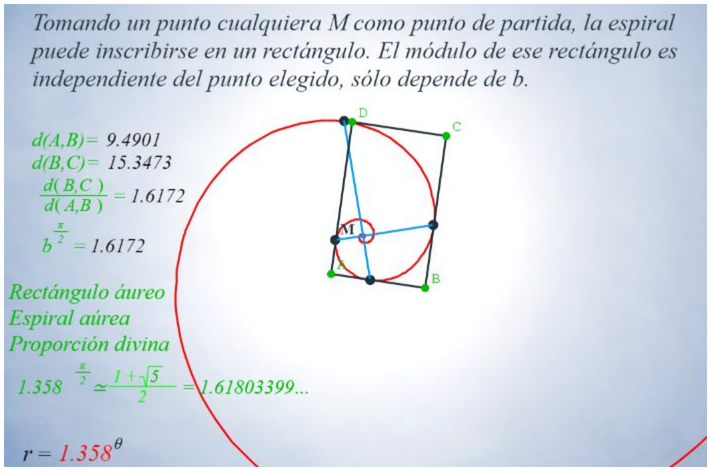
Espiral logarítmica cordobesa. Factor de crecimiento 2,9142...

Y llegamos a un momento cumbre porque damos la bienvenida a la espiral ¡CORDOBESA! ¿Por qué? Porque gracias al carácter equiangular de toda espiral logarítmica, si consideramos cuatro puntos cuyos argumentos se diferencian en pi/2 radianes al trazar las tangentes en esos puntos la espiral queda inscrita en un rectángulo. Y la proporción de ese rectángulo es $b^{\pi/2}$.

Si ese rectángulo es cordobés diremos que la espiral el cordobesa. Es decir si $b^{\pi/2}$ es la razón cordobesa, entonces la base b es aproximadamente 1,185.

El factor de crecimiento b^(2pi) en este caso es aproximadamente 2,91. Así pues en la espiral cordobesa, en cada vuelta la distancia al polo queda casi triplicada.

Espiral logarítmica áurea



Espiral logarítmica áurea. Factor de crecimiento 6,8541...

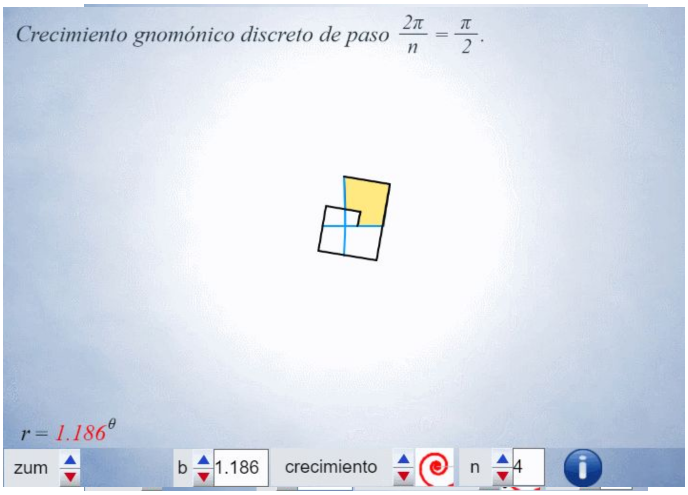
Para tener la espiral logarítmica áurea el valor de la base b es aproximadamente 1,358 y el factor de crecimiento es casi siete.
Hay una diferencia importante entre la espiral cordobesa y la áurea, un factor de crecimiento próximo a tres de la cordobesa frente a casi siete en la áurea.

Crecimiento gnomónico discreto de paso π/2

Factor de crecimiento $b^{\pi/2}$.

Sin pararme a detallar podemos observar que en base a esos rectángulos circunscritos la región delimitada por toda espiral logarítmica puede aproximarse por hexágonos en forma de L. Tenemos un modelo de crecimiento gnomónico discreto de paso pi/2 y el factor de crecimiento sería $b^{\pi/2}$

Crecimiento gnomónico discreto de paso 2π/n



Caso límite

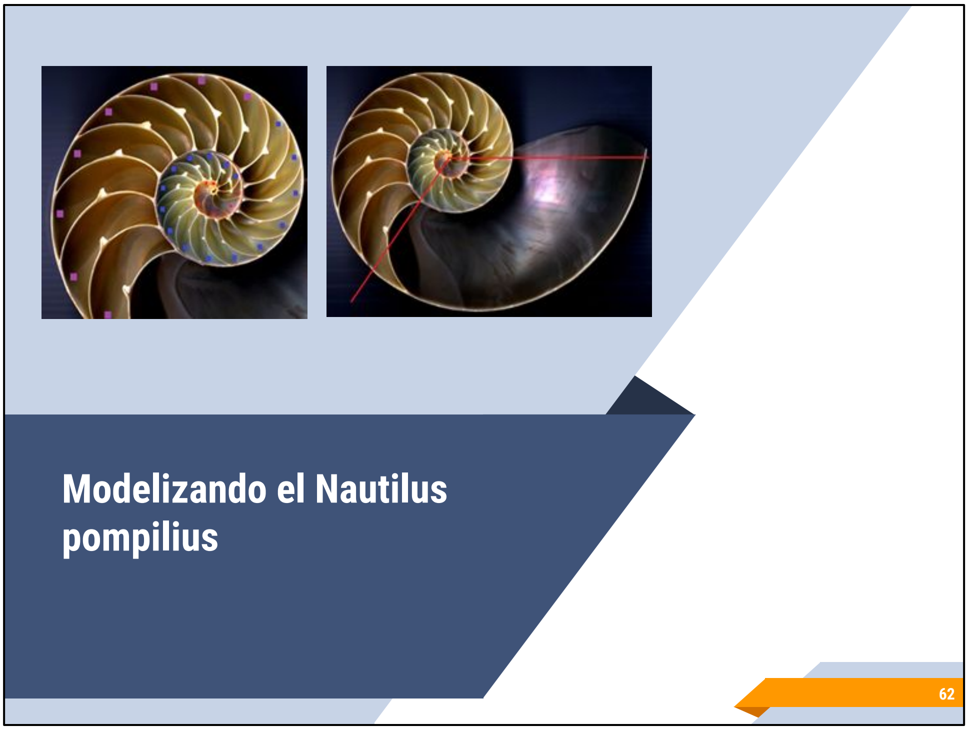
$$\lim_{n\to\infty} b^{\frac{2\pi}{n}} = 1$$

"Eadem mutato resurgo"

"Mutante resurjo siendo la misma"

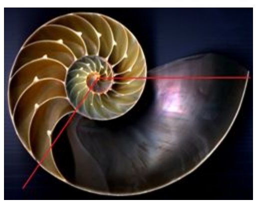
Factor de crecimiento $b^{2\pi/n}$.

Ese crecimiento puede extenderse a cualquier paso 2π/n. Obviamente a medida que el paso angular considerado es menor la aproximación a la espiral es mejor.
Y en el caso límite tendríamos que el factor de crecimiento sería la unidad. Esto puede considerarse como una explicación, o al menos yo lo asocio con el lema empleado por Jakob Bernoulli en relación a su espiral maravillosa: "Eadem mutato resurgo" (Mutante resurjo siendo la misma).



Abordemos la fase final. regresemos a nuestro Nautilus y tratemos de leer su bitácora vital e interpretarla adecuadamente.

Morfología del Nautilus



- Concha discoidal.
- Sección espiral.
- Dos verticilos y medio:
  - fase neánica con ocho cámaras,
  - fase juvenil con dieciséis,
  - fase adulta con ocho cámaras.
- Cámara habitacional.
- Septos y canal sifuncular.

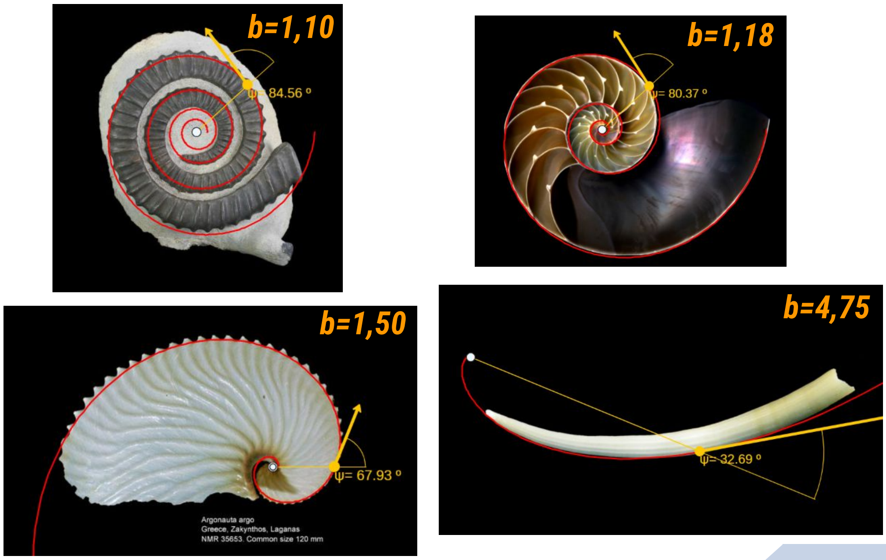
Ya indicamos en una primera inspección visual que la concha es discoidal y su sección parecía ser una espiral.
En el interior vemos un núcleo inicial o protoconcha correpondiente al estado embrionario, el fragmacono que está dividido en cámaras separadas por septos que comprende dos verticilos y medio y la cámara habitacional.
En esos verticilos contabilizamos ocho cámaras en al fase neánica, dieciséis en la juvenil y otras ocho en la fase adulta dos verticilos y medio. El paso, digamos característico, entre cámaras es pi/8.
Es decir, en las cámara podemos asimilar que hay un crecimiento gnomónico discreto de paso pi/8.

Para determinar si la espiral de la sección de la concha es logarítmica basta verificar que el crecimiento sea geométrico determinando la razón o factor de crecimiento. Para ello, la modelización tradicional se basa esencialmente en la medición lo cual obviamente no está exenta de dificultades y errores de medidad. Con este procedimiento Moseley asignó al Nautilus un factor de crecimiento de tres.
En nuestro caso, este análisis ha sido sustituido por la utilización de una escena desarrollada con la herramienta Descartes en la que podemos dibujar diferentes espirales logarítmicas, superponiéndolas con la imagen, y entre ellas seleccionar aquella que mejor se ajusta cuando la espiral logarítmica es una espiral cordobesa.
En la imagen observamos cuál sería la espiral correspondiente al factor de crecimiento tres. La medición de Moseley se aproximó, pero no coincide totalmente.

La espiral que mejor se ajusta a la sección del Nautilus se consigue cuando el factor de crecimiento es 2,914…, es decir, cuando la espiral logarítmica es la espiral cordobesa. **¡Surge la primera evidencia del carácter cordobés del Nautilus pompilius!**

Y por supuesto muy alejada de la espiral áurea con factor de crecimiento casi de siete y claramente alejada del perfil del Nautilus. ¡La realidad es tozuda! por mucho que siempre se ponga como ejemplo de proporción áurea al Nautilus. No, el Nautilus no sigue la proporción áurea, ¡sigue la proporción cordobesa!

Forma ligada al factor de crecimiento



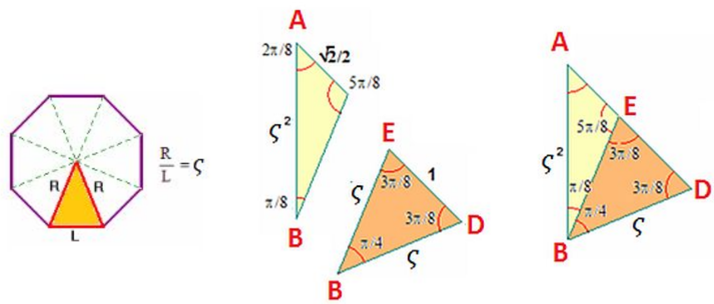
El factor de crecimiento, o en definitiva el valor de b en la espiral logarítmica es clave de la forma de la concha. En la imagen podemos ver algunos ejemplos en función del valor de b. Al crecer b el ángulo del radio vector y la tangente disminuye y el factor de crecimiento aumenta.

Y si a esa espiral logarítmica cordobesa le aplicamos el crecimiento gnomónico discreto que ante indicamos que puede aplicarse a toda espiral logarítmica logramos obtener la primera aproximación de las cámaras y observar el crecimiento con paso 2pi/16, es decir pi/8.

Nuestro primer modelo del Nautilus. Una primera observación del Nautilus matemático

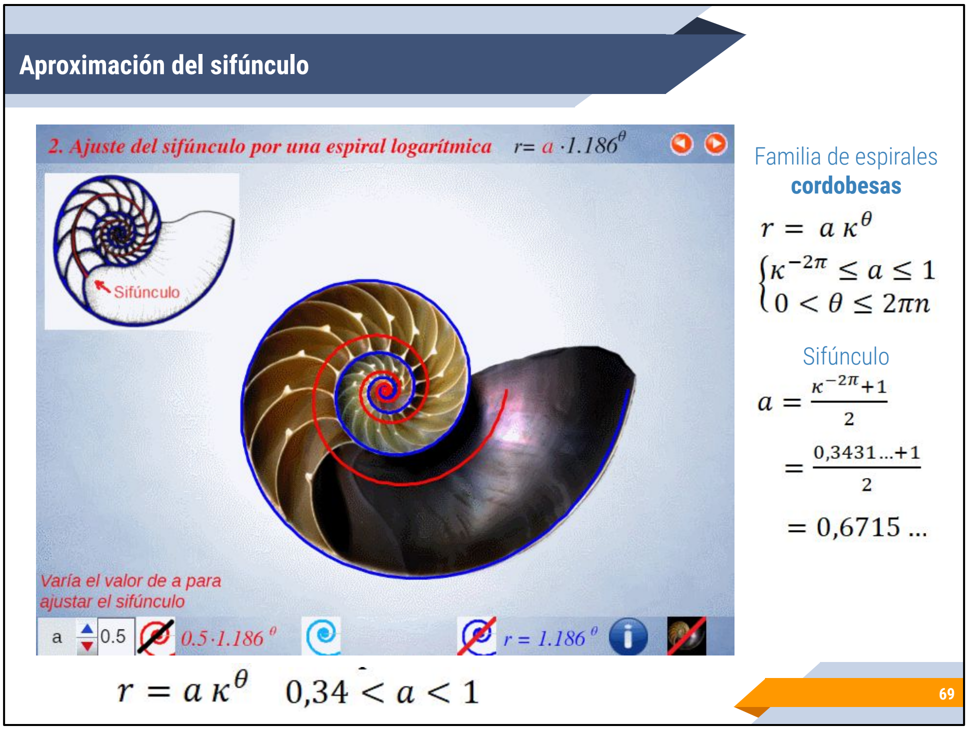
Gnomon de un triángulo cordobés

¿2π/16? ¿π/8?



¿Casual? o **¡CAUSAL!**

¿pi octavos?, ¿pi octavos?
¡Claro! Si tomamos un triángulo cordobés, es decir, cada uno de los triángulos en que se puede descomponer el octógono, podemos observar que en el gnomon de ese triángulo aparece ese ángulo de pi/8. Todos los ángulos que intervienen son múltiplos de pi octavos.
¿Casual? ¡No!, es obvio que es consecuencia de una causa, es CAUSAL
¡Ujú! o como decimos en mi tierra ¡Ozú, mi arma que arte tiene este Nautilus!



Conceptualmente es lógico pensar que cualquier punto del interior de la concha ha debido está sujeto a un mismo tipo de crecimiento y por ello si nos marcamos como objetivo aproximar el sifúnculo procede buscar ese ajuste en la misma espiral cordobesa, pero aplicando un factor de escala o retardo.
En la imagen comprobamos como todo el interior de la concha se ajusta por familias de espirales cordobesas en las que el factor de escala observamos que toma toma valores entre 0,34 y 1, y el sifúnculo aproximadamente se corresponde con a=0,7.
El modelo teórico justifica el por qué de los valores detectados.
Pensado en el cono que deformándose da lugar al habitáculo del Nautilus la parte interior puede considerarse o interpretarse que tiene un retardo k^(-2πi) y para espiral cordobesa ese valor es aproximadamente 0,34. Por ello todas las espirales cordobesas en el habitáculo tienen como factor de retardo valores entre 0,34 y 1.
¿Y el sifunculo? Lo intutitivo es que esté justamente en la parte intermedia, si fuera un cono sería el eje del cono. Así pues si hallamos la media aritmética obtenemos el factor 0,67

Apoyándonos en el sifúnculo podemos realizar una mejora en la aproximación gnomónica de las cavidades…

E incluso considerar la familia de espirales cordobesas y proceder en base a ellas a una mejor aproximación.
Hemos mejorado el modelo cordobés del Nautilus.

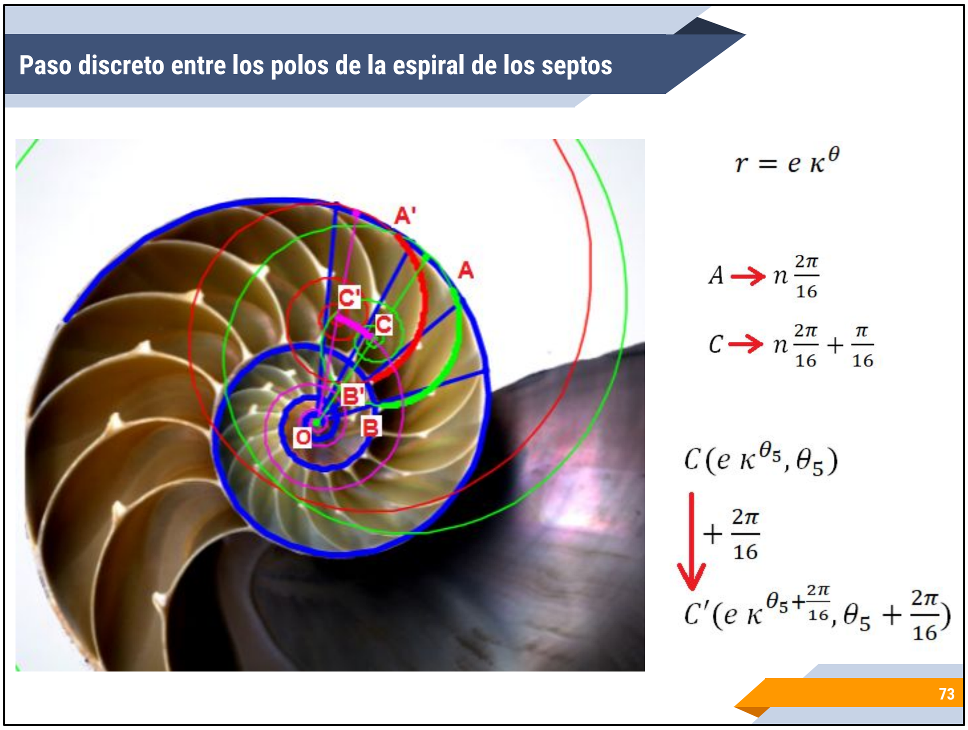
La espiral cordobesa es intrínseca al ser del Nautilus, todo punto de él se encuentra en una espiral cordobesa. Y ello hace pensar que los septos no pueden seguir un patrón diferente al canon cordobés. Así pues tratemos de ajustar con arcos de esa espiral.
Si probamos con otra espiral observamos que no encaja, algún septo sí, pero en general no.
¡Tiene que ser cordobesa! pongamos b=1.185 Pero no encaja… ¡no,no puede ser! ¡tiene que hablar cordobé!, ¿habrá que escalarla, es decir, girarla?
Pongo a=0.5 y ¡oh la la! ¡ahora sí! Cada septo es un arco de esa espiral que va desplazándose a la vez que se desplaza el polo.
¡Los septos son arcos de espirales cordobesas!

Espiral de los septos y trayectoria del polo

$$r = e\,\kappa^{\theta} \qquad e = \frac{\frac{\kappa^{-2\pi}+1}{2}+\kappa^{-2\pi}}{2} = 0{,}507359\ldots$$

Esto pone nervioso a cualquiera ¿verdad?
Los septos son arcos de una espiral cordobesa que va desplazándose…
Y el polo de esa espiral sigue la trayectoria de otra espiral… que será…. ¡Sí es cordobesa! ¡Claro que sí!
Esto se merece recordar lo que decía el torero andaluz Jesulín: “**En dos palabras ¡In! ¡presionante!**”

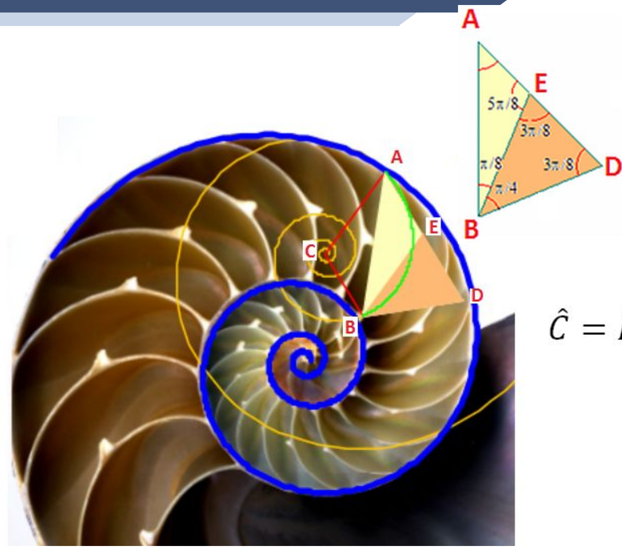
La espiral de los polos es una intermedia entre la capa interior y el sifúnculo. Considerando la media aritmética de los coeficientes de ambas obtenemos que el factor de escala es aproximadamente 0,5.



Efectuando un análisis de las proporciones existentes entre dos septos consecutivos, el cual no detallo aquí, pero que pueden consultarlo en nuestro artículo sobre el Nautilus, se determina que:

- El ángulo polar del polo correspondiente al septo n-ésimo está deplazado pi/16
- El paso entre dos polos es 2pi/16 o pi/8. ¡Lógico que coincida con el paso interseptos!

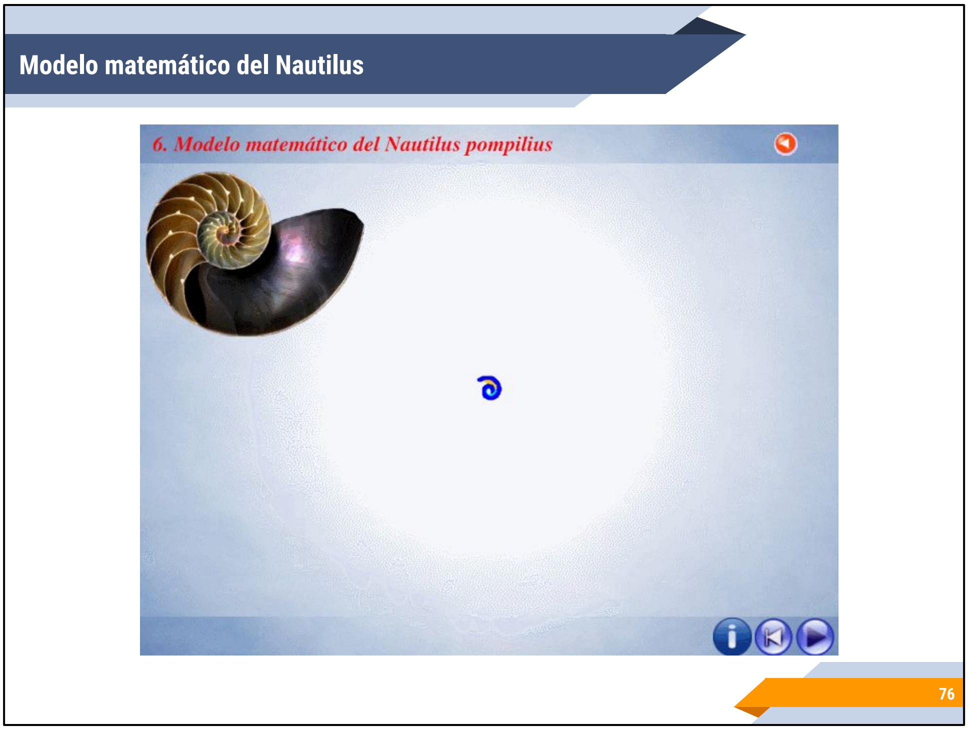
Amplitud del septo



$$\hat{C} = \hat{E} = \frac{5\pi}{8}$$

Y a esta altura ¿alguien se sorprenderá de que la amplitud del arco de cada septo sea 5pi/8, que es el ángulo denotado como E en la imagen correspondiente al gnomon del triángiulo cordobés? pi/8 era el ángulo del gnomon que se trasladaba al paso interceptos y 5pi/8 es esa amplitud de arco.
Todo cuadra, es lo que nos traslada el Nautilus

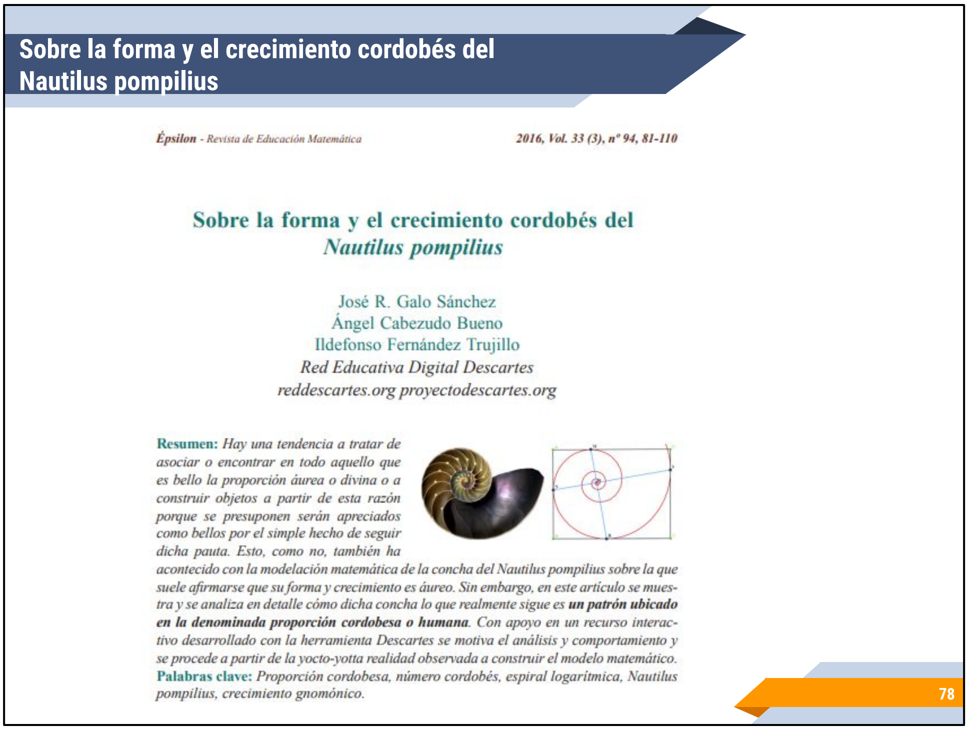
Con todos esos datos podemos observar el modelo de los septos. Cada uno de elos los hemos dividido en dos partes (en rojo y verde) partidos por el sifúnculo.
En los últimos septos se observa que hay cierta diferencia entre la realidad y el modelo, no obstante está documentado que en la fase adulta se pueden presentar ciertas modificaciones en el crecimiento y eso es lo que aquí estamos constatando. Se podría incluir esta variación en el modelo matemático, pero no es el objetivo aquí.



TAsí pues estamos en condiciones de presentar el modelo matemático del Nautilus pompilius que es el que reflejamos en esta diapositiva.
Y he de insitir que todo punto del interior de la concha es la intersección de un punto de una espiral cordobesa longitudinal y una espiral cordobesa transversal.
Todo en el Nautilus se muestra concordante con la proporción cordobesa. Por ello es natural que ¡el Nautilus es natural y yo cantemos juntos! :

¡Soy CORDOBÉ!

Soy cordobés,
de la tierra de Julio Romero,
el pintor de "La musa gitana",
Córdoba sultana,
¡cuánto te quiero!
Soy cordobés,
y a la orilla del Guadalquivir
tengo que pone' un letrero
diciendo "me muero",
¡Córdoba por ti!



Y como ya estarán ustedes cansados de este cordobés, permítanme que termine citando a mis dos colegas cartesianos españoles, de la RED Descartes. Pero no teman que no son cordobeses. Ángel Cabezudo Bueno que es de Valladolid e Ildefonso Fernández Trujillo de Madrid. Juntos logramos que el Nautilus nos cantara lo de soy cordobés y aún seguimos hablando con él y escuchándole atentos porque el modelo tridimensional todavía lo tenemos abierto.

Muchas gracias por su paciencia e interés y les animo a participar en el taller de Descartes que ha programado la organización.

¡Ah! ¡Se me olvidaba indicarles que no se dejen llevar por las *fake news* que circulan por las redes afirmando que el Nautilus es un referente de la proporción áurea. ¡No!, el Nautilus es referente CORDOBÉ.
Muchas gracias.

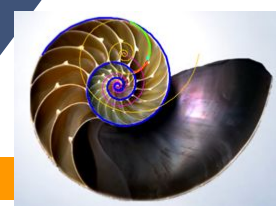
24 Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones

19, 20 y 21 de junio de 2019

Universidad Pedagógica Nacional (sede Instituto Pedagógico Nacional)

Bogotá, Colombia

El Nautilus: referente del crecimiento gnomónico cordobés



proyecto descartes .org

Prof. Dr. José R. Galo Sánchez